Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 140-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__140_1>

QUESTIONS.

1384. D'un point pris sur une hyperbole équilatère on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe. Démontrer que les côtés d'un triangle quelconque inscrit dans l'hyperbole déterminent sur ces droites des segments proportionnels. (MANNHEIM.)

1385. On donne sur un plan une ellipse de centre o et un point fixe. De ce point, on mène une transversale qui rencontre l'ellipse au point p. Le diamètre conjugué de op coupe la transversale au point m.

Pour quelles directions de la transversale le segment pm est-il maximum ou minimum? (MANNHEIM.)

1386. Soient A, B, C et D quatre points pris arbitrairement sur un cercle ayant pour centre le point O. Considérons l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points, et de son centre ω abaissons une perpendiculaire ωP sur un côté quelconque AB du quadrilatère ABCD; du centre O du cercle, abaissons une perpendiculaire OQ sur le côté opposé CD. En désignant par V l'angle que font les côtés AB et CD, démontrer la relation

$$\omega P = OQ \cos V.$$

(LAGUERRE.)

1387. Soient deux cercles fixes C et C' tangents aux droites D et D'; on considère un cercle variable K qui touche C et C' et on lui mène des tangentes parallèles à D et D' : trouver le lieu de leur point de rencontre.

(LAGUERRE.)

1388. L'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; soient α et β deux racines consécutives de cette équation. La dérivée $f'(x)$ s'annule pour une valeur ω comprise entre α et β; démontrer que ω est comprise entre

$$\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)\alpha + \beta}{n},$$

n désignant le degré de l'équation. (LAGUERRE.)

1389. L'équation de degré n, $f(x) = 0$, a toutes ses racines réelles; l'équation $f^2(x) + k^2 f'^2(x) = 0$, où k désigne un nombre positif, a toutes ses racines imaginaires. Démontrer que, dans chacune de ces racines, le coefficient de i est inférieur à kn; on suppose $n \gtrless 2$.

(LAGUERRE.)

1390. Considérons l'équation $f(x) = 0$ qui a toutes ses racines réelles; k désignant un nombre réel arbitraire, supposons que l'équation $f(x) + k = 0$ ait m

racines imaginaires : démontrer que l'équation

$$f'^2(x) - f(x)f''(x) - k f''(x) = 0$$

a m racines réelles, toutes les autres étant imaginaires.

(LAGUERRE.)

1391. Soit k la courbe enveloppée par une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes. Démontrer que toute courbe parallèle à k peut être engendrée de la même façon.

(LAGUERRE.)

1392. Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, démontrer que, ω étant une quantité réelle quelconque plus petite que l'unité, l'équation

$$a + b\omega x + c\omega^4 x^2 + \ldots + k\omega^{n^2} x^n = 0$$

a également ses racines réelles. (LAGUERRE.)

1393. Soit le polynôme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

supposons qu'en ajoutant à ce polynôme un certain nombre de termes de degré supérieur à n, on puisse obtenir un autre polynôme $f(x)$, tel que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles : démontrer que l'équation

$$\frac{a_0}{1.2.3\ldots n} + \frac{a_1 x}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{a_2 x^2}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots + \frac{a_{n-2}x^{n-2}}{1.2} + \frac{a_{n-1}x}{1} + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles. (LAGUERRE.)

1394. $f(x)$ désignant un polynôme quelconque à coefficients réels, on peut toujours déterminer un nombre positif ω, tel que le développement de $e^{\omega x} f(x)$, suivant les puissances croissantes de x, présente précisément autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ a de racines positives. (LAGUERRE.)

1395. Par un point quelconque M d'une hyperbole, on mène des droites parallèles aux asymptotes; par un autre point M′ pris arbitrairement sur l'hyperbole, on mène deux cercles, tangents aux asymptotes et ayant leurs centres sur l'axe transverse de la courbe : démontrer que ces deux droites et ces deux cercles sont tangents à un même cercle. (LAGUERRE.)