Nouvelles annales de mathématiques

Henri Cartier

Solution d'une question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1880

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 1 (1882), p. 118-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1882_3_1__118_0>

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880;

PAR M. HENRI CARTIER,
Élève du lycée d'Angoulême.

On donne une ellipse et un cercle ayant pour centre un foyer F *de l'ellipse. On demande :*

1° *De trouver le lieu* I *du point tel que, si l'on mène de ce point des tangentes à l'ellipse et au cercle, les coefficients angulaires m et m' des tangentes à l'ellipse et les coefficients angulaires k et k' des tangentes au cercle vérifient la relation*

$$2(mm' + kk') = (m + m')(k + k');$$

2° *De trouver l'équation du lieu* P *du point de contact des tangentes menées par un point donné à tous les lieux* I *correspondant aux diverses valeurs du carré du rayon du cercle;*

3° *De construire le lieu* P *quand le point donné est sur le grand axe de l'ellipse;*

4° *De construire le lieu* P *lorsque le point donné est sur la directrice correspondant au foyer* F *de l'ellipse.*

1° Prenons le foyer F pour origine, et supposons que ce soit le foyer de droite. L'équation de l'ellipse est

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

celle du cercle est

$$(\mathrm{C}) \qquad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Soit (x, y) un point I. Les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à l'ellipse sont donnés par

$$y - m(x + c) = \pm\sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

ou

$$m^2[(x + c)^2 - a^2] - 2my(x + c) + y^2 - b^2 = 0;$$

ceux des tangentes menées au cercle sont donnés par

$$y - kx = \pm\sqrt{r^2(1 + k^2)}$$

ou

$$(x^2 - r^2)k^2 - 2kxy + y^2 - r^2 = 0.$$

Ces coefficients vérifiant la relation de l'énoncé, on a

$$\frac{y^2 - b^2}{(x + c)^2 - a^2} + \frac{y^2 - r^2}{x^2 - r^2} = \frac{2xy^2(x + c)}{[(x + c)^2 - a^2](x^2 - r^2)}$$

ou

$$\text{(I)} \qquad (x^2 + y^2)(b^2 + r^2) + 2cr^2x - 2b^2r^2 = 0.$$

Ce lieu I est un cercle ayant son centre sur le grand axe de l'ellipse.

2° Soit (α, β) un point M. Sa polaire par rapport à (I) est

$$\alpha x(b^2 + r^2) + cr^2x + cr^2\alpha + \beta y(b^2 + r^2) - 2b^2r^2 = 0.$$

Éliminons r^2 entre cette équation et I, on a le second lieu

$$\text{(P)} \quad (x^2 + y^2)(cx + c\alpha - 2b^2) - 2(cx - b^2)(\alpha x + \beta y) = 0.$$

Ce lieu est du troisième degré, et passe aux points circulaires à l'infini.

La tangente à l'origine est $\alpha x + \beta y = 0$. Elle correspond au cas où $r = 0$; le cercle I se réduit à un point F, et la polaire de M par rapport à ce cercle de rayon nul est la perpendiculaire $\alpha x + \beta y = 0$ menée en F à FM.

Le lieu passe en M où la tangente est parallèle à $\alpha x + \beta y = 0$. Ceci est évident, si l'on remarque que le cercle I passe par M pour une valeur particulière de r.

Si nous considérons le cercle ayant FM pour diamètre, nous voyons que le lieu est doublement tangent à ce cercle, la corde des contacts étant FM. Comme le lieu et le cercle se coupent généralement en six points, les deux autres points sont en même temps réels ou imaginaires.

Le lieu a pour asymptote réelle la droite

$$cx - 2b^2 + c\alpha = 0,$$

qui est perpendiculaire à Ox. L'équation (P) montre que le lieu coupe cette asymptote et la tangente à l'origine $\alpha x + \beta y = 0$ au même point.

Les points de la courbe situés sur Ox, autres que l'origine, ont leurs abscisses égales à

$$\frac{2b^2 - \alpha c \pm (2b^2 - \alpha c)}{2c}.$$

L'un est la projection de M sur cet axe, l'autre a pour abscisse $\frac{2b^2}{c}$.

De même les deux points situés sur Oy sont réels, et l'un est la projection de M sur cet axe.

Le lieu a donc, dans le cas général, la forme de la figure.

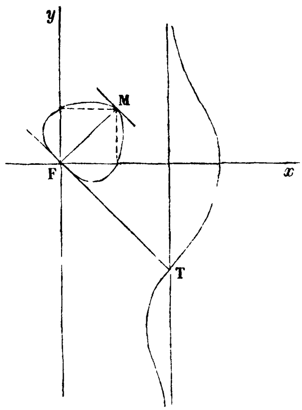
3° Si P est sur le grand axe de l'ellipse $\beta = 0$, l'équation (P) devient

$$(x^2 + y^2)(cx + c\alpha - 2b^2) - 2\alpha x(cx - b^2) = 0.$$

Le lieu est symétrique par rapport à l'origine. Il jouit des mêmes propriétés que dans les cas précédents.

Nous pouvons remarquer que, dans ce cas, l'asymptote et la tangente à l'origine devenant parallèles, le point T est rejeté à l'infini.

La partie fermée de la courbe ne coupe pas le cercle

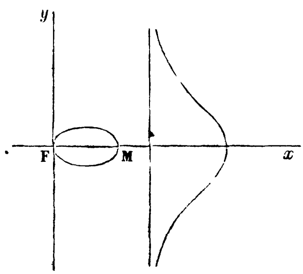


$x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0$, ayant FM pour rayon, ailleurs qu'en M ou F. Écrivons P sous la forme

(P) $(x^3 + y^2 - 2\alpha x)(cx - b^2) + (x^2 + y^2)(c\alpha - b^2) = 0.$

Les points communs au cercle et à (P) sont sur les droites

$$x^2 + y^2 = 0.$$



Ils sont imaginaires, car, s'ils étaient réels, ces droites seraient réelles, puisqu'elles auraient un deuxième point réel à l'origine.

Le lieu a la forme de la figure.

Son troisième point de rencontre avec l'axe Ox a pour abscisse $\frac{2b^2}{c}$.

3° Si le point M est sur la directrice correspondant au foyer F, on a

$$\alpha = \frac{b^2}{c};$$

l'équation (P) devient

$$(cx - b^2)\left[x^2 + y^2 - 2\left(\frac{b^2}{c}x + \beta y\right)\right] = 0.$$

Il se décompose en la directrice

$$cx - b^2 = 0,$$

relative au foyer F, et en

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{b^2}{c}x + \beta y\right) = 0:$$

c'est le cercle ayant pour FM son rayon.

Note. — Solutions analogues par MM. l'abbé Geneix-Martin, de l'école Saint-Sigisbert, à Nancy; Grimaud, maître répétiteur au lycée de Tarbes; L. Kien, élève de Notre-Dame du Sacré-Cœur, à Plaisance; H. Lez.