Nouvelles annales de mathématiques

E. Fauquembergue

Solution d'une question de licence (faculté de Lille. Novembre 1878)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 55-57
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__55_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE LILLE. — NOVEMBRE 1878);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Une surface de révolution autour de l'axe des z, en coordonnées rectangulaires, est définie par l'équation $z=f(r)$, r étant la distance d'un point de la surface à l'axe de rotation : trouver l'équation différentielle en coordonnées polaires des projections sur le plan xy des courbes tracées sur cette surface, et qui jouissent de la propriété que le plan osculateur en chacun des points de l'une d'elles comprenne la normale à la surface au même point; prendre r pour variable indépendante.

Le plan osculateur en un point (x, y, z) d'une courbe a pour équation

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

en posant

$$A = dy\, d^2 z - dz\, d^2 y,$$
$$B = dz\, d^2 x - dx\, d^2 z,$$
$$C = dx\, d^2 y - dy\, d^2 x.$$

Les équations de la normale à la surface au même point sont

$$X - x + \frac{dz}{dx}(Z - z) = 0,$$

$$Y - y + \frac{dz}{dy}(Z - z) = 0.$$

La normale sera dans le plan osculateur si l'on a

$$A\frac{dz}{dx} - B\frac{dz}{dy} - C = 0.$$

Or,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

$$\frac{dx}{dr} = \cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}, \quad \frac{d^2x}{dr^2} = -2\sin\theta\frac{d\theta}{dr} - r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2},$$

$$\frac{dy}{dr} = \sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}, \quad \frac{d^2y}{dr^2} = 2\cos\theta\frac{d\theta}{dr} - r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2},$$

$$A = \frac{d^2z}{dr^2}\left(\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)$$
$$- \frac{dz}{dr}\left(2\cos\theta\frac{d\theta}{dr} - r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right),$$

$$B = -\frac{d^2z}{dr^2}\left(\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right)$$
$$- \frac{dz}{dr}\left(2\sin\theta\frac{d\theta}{dr} + r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} + r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right),$$

$$C = \left(\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right)\left(2\cos\theta\frac{d\theta}{dr} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)$$
$$+ \left(\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)\left(2\sin\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} + r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right).$$

D'ailleurs,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dz}{dr}\cos\theta,$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dy} = \frac{dz}{dr}\sin\theta.$$

Donc

$$\mathrm{A}\frac{dz}{dx} + \mathrm{B}\frac{dz}{dy} - \mathrm{C} = \frac{dz}{dr}(\mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta) - \mathrm{C}.$$

Mais

$$\mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta = f''(r)\,r\frac{d\theta}{dr} + f'(r)\left(2\frac{d\theta}{dr} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right),$$

$$\mathrm{C} = 2\frac{d\theta}{dr} + r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}.$$

L'équation différentielle des courbes est donc

$$f'(r)f''(r)\,r\frac{d\theta}{dr} - f'^2(r)\left(2\frac{d\theta}{dr} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right) - 2\frac{d\theta}{dr} - r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} - r\frac{d^2\theta}{dr^2} = 0$$

ou

$$r[1+f'^2(r)]\frac{d^2\theta}{dr^2} + \left\{2[1+f'^2(r)] - rf'(r)f''(r)\right\}\frac{d\theta}{dr} + r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} = 0.$$