NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. SALTEL

Contribution à la théorie de la substitution des systèmes d'équations. Application de cette théorie à la recherche de l'équation et des points multiples d'un lieu défini par k équations contenant $k-1$ paramètres variables

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 546-564

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__546_1>

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE LA SUBSTITUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS. APPLICATION DE CETTE THÉORIE A LA RECHERCHE DE L'ÉQUATION ET DES POINTS MULTIPLES D'UN LIEU DÉFINI PAR k ÉQUATIONS CONTENANT $k-1$ PARAMÈTRES VARIABLES;

PAR M. L. SALTEL,
Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

I. — OBJET DU MÉMOIRE.

On rencontre, en Algèbre élémentaire, de nombreux problèmes se résolvant sans peine, grâce à l'introduction de solutions étrangères préalablement connues : il suffit, en effet, de les supprimer à la fin du calcul.

C'est, je crois, faute d'avoir remarqué l'existence et la détermination précise de certains résultats étrangers, qui s'introduisent nécessairement par les substitutions *connues* d'un système d'équations à un autre système d'équations, que l'on ne développe pas, dans les Traités de Géométrie analytique, un procédé *élémentaire* permettant de trouver l'équation d'un lieu géométrique défini par k équations contenant $k-1$ paramètres variables. En traitant, dans le présent travail, *quatre* cas particuliers de ce dernier problème général, j'aurai donc surtout en vue de mettre en parfaite évidence l'existence et la détermination exacte des non-solutions que l'on rencontre dans l'application des règles les plus élémentaires relatives à la théorie de l'élimination; j'indiquerai en outre un moyen, non encore remarqué, d'obtenir, en même temps que l'équation du lieu, les coordonnées des points multiples de ce lieu.

II. — Premier problème.

Problème. — *Éliminer α entre les équations*

$$(a)\quad \begin{cases} A(x, y, \alpha) = 0, & (1) \\ B(x, y, \alpha) = 0, & (2) \end{cases}$$

supposées respectivement d'ordres m, n par rapport à ce paramètre, et déterminer les points multiples du lieu défini par ces mêmes équations.

Solution. — Ordonnons ces équations par rapport au paramètre α; on aura

$$(a')\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} A = A_1(x, y)\alpha^m + A_2(x, y)\alpha^{m-1} \\ + A_3(x, y)\alpha^{m-2} + A_4(x, y)\alpha^{m-3} + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} (3) \\ \left.\begin{aligned} B = B_1(x, y)\alpha^n + B_2(x, y)\alpha^{n-1} \\ + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} (4) \end{cases}$$

Supposons d'abord que les exposants m et n soient inégaux; supposons, par exemple, que

$$m = n + 3; \tag{5}$$

le système (a') pourra s'écrire

$$(a'')\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} A = A_1(x, y)\alpha^n\alpha^3 + A_2(x, y)\alpha^{n+2} + A_3(x, y)\alpha^{n+1} \\ + A_4(x, y)\alpha^n + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} (6) \\ \alpha^n = \dfrac{-[B_2(x, y)\alpha^{n-1} + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots]}{B_1(x, y)}. \quad (7) \end{cases}$$

Substituons à la relation (6) la relation obtenue en remplaçant, dans le premier terme de cette équation, α^n par sa valeur (7); on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$(b)\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} C = C_1(x, y)\alpha^n\alpha^2 + C_2(x, y)\alpha^{n+1} + C_3(x, y)\alpha^n \\ \qquad + C_4(x, y)\alpha^{n-1} + \ldots = 0, \end{array}\right\} & (8) \\ \alpha^n = \dfrac{-[B_2(x, y)\alpha^{n-1} + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots]}{B_1(x, y)}, & (9) \end{array}\right.$$

qui se composera évidemment du système (a'') plus du système *étranger* défini par

$$(c)\quad\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} B_2(x, y)\alpha^{n-1} + B_3(x, y)\alpha^{n-2} \\ \qquad + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, \end{array}\right\} & (10) \\ B_1(x, y) = 0, & (11) \end{array}\right.$$

en sorte que (b) représentera non seulement le lieu proposé (a), mais encore la courbe étrangère, comptée, en général, $n-1$ fois [1], ayant pour équation

$$B_1(x, y) = 0\ [2]. \qquad (12)$$

Cette introduction d'une courbe étrangère rend le système (b) plus facile à résoudre que le système (a''), puisque l'équation (6) se trouve remplacée par l'équation (8), qui est de degré moindre d'*une unité* par rapport au paramètre à éliminer α.

Substituons encore à l'équation (8) l'équation obtenue en remplaçant, dans le premier terme de cette re-

---

(1) Il correspond, en effet, si le terme $B_1(x, y)$ n'est pas nul, $n-1$ valeurs du paramètre α pour chaque point (x, y) de cette courbe. — Voir la Note sur les points multiples qui termine le présent paragraphe.

(2) Il est très important d'observer que, dans le cas particulier où l'on a $A_1(x, y) = B_1(x, y)$, on n'introduit pas de lieu étranger si l'on a soin, après la substitution de (9) dans le premier terme de (8), de diviser par $B_1(x, y)$ le numérateur et le dénominateur du coefficient de ce premier terme. On n'introduit pas non plus de lieu étranger lorsque $n = 1$.

lation, α^n par sa valeur (9); on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$(d)\left\{\begin{aligned} &D = D_1(x,y)\alpha^n\alpha + D_2(x,y)\alpha^n + D_3(x,y)\alpha^{n-1} \\ &\qquad + D_4(x,y)\alpha^{n-2} + \ldots = 0, \quad (13) \\ &\alpha^n = \frac{-[B_2(x,y)\alpha^{n-1} + B_3(x,y)\alpha^{n-2} + B_4(x,y)\alpha^{n-3} + \ldots]}{B_1(x,y)}, \quad (14) \end{aligned}\right.$$

qui se composera du système (b) plus du système *étranger* défini par (c).

Substituant enfin à l'équation (13) l'équation obtenue en remplaçant, dans le premier terme de cette relation, α^n par sa valeur (14), on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$(e)\left\{\begin{aligned} &E = E_1(x,y)\alpha^n + E_2(x,y)\alpha^{n-1} \\ &\qquad + E_3(x,y)\alpha^{n-2} + E_4(x,y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, \quad (15) \\ &B = B_1(x,y)\alpha^n + B_2(x,y)\alpha^{n-1} \\ &\qquad + B_3(x,y)\alpha^{n-2} + B_4(x,y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, \quad (16) \end{aligned}\right.$$

qui se composera du système (d) plus du système étranger défini par (c).

Les trois substitutions des systèmes (b), (d), (e) au système (a') suffisent évidemment pour établir ce théorème :

Théorème I. — *Quels que soient les exposants m et n du paramètre α, on peut toujours, sauf à introduire des solutions étrangères parfaitement définies, substituer au système (a') un système de la forme (e) dans lequel les plus hauts exposants de α sont égaux dans les deux équations.*

Cela fait, l'équation (16) pouvant s'écrire sous la forme (14), substituons à la relation (15) la relation obtenue en remplaçant dans le premier terme de cette équation α^n par sa valeur (14); on aura, après avoir chassé les dénominateurs, le système

$$(f) \qquad \begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, & (17) \\ B = 0, & (18) \end{cases}$$

qui se compose évidemment du système (e), plus du système étranger défini par

$$(g) \qquad \begin{cases} B_1 = 0, & (19) \\ B = 0, & (20) \end{cases}$$

c'est-à-dire par

$$(h) \quad \begin{cases} B_1(x, y) = 0, & (21) \\ B_2(x, y)\alpha^{n-1} + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, & (22) \end{cases}$$

en sorte que (f) représentera non seulement le lieu (e), mais encore la courbe étrangère, comptée, en général, $n - 1$ fois, ayant pour équation

$$B_1(x, y) = 0. \qquad (23)$$

Cette introduction d'un lieu étranger rend encore le système (f), qui est de la forme

$$(i) \quad \begin{cases} F = F_1(x, y)\alpha^{n-1} + F_2(x, y)\alpha^{n-2} + F_3(x, y)\alpha^{n-3} + F_4(x, y)\alpha^{n-4} + \ldots = 0, & (24) \\ B = B_1(x, y)\alpha^{n} + B_2(x, y)\alpha^{n-1} + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, & (25) \end{cases}$$

plus facile à résoudre que le système (e), puisque l'équation (15) se trouve remplacée par l'équation (24), qui est de degré moindre d'*une unité* par rapport au paramètre à *éliminer α. De là ce théorème :*

THÉORÈME II. — *Quel que soit l'exposant n dans les deux équations (e), on peut toujours, sauf à introduire des solutions étrangères parfaitement définies, substituer à ce système un système de la forme (i) dans lequel l'exposant (α) est diminué d'une unité dans l'une des équations.*

L'application du théorème I au système (i) permettant d'abaisser d'une unité l'exposant de α dans l'équation (25), il est manifeste que l'application successive des théorèmes I et II suffira, sauf, redisons-le, à introduire des solutions étrangères *parfaitement définies*, pour pouvoir substituer au système proposé (a') un système de la forme

$$(j)\quad \begin{cases} G = G_1(x,y)\alpha + G_2(x,y) = 0, & (26) \\ H = H_1(x,y)\alpha^2 + H_2(x,y)\alpha + H_3(x,y) = 0, & (27) \end{cases}$$

que l'on remplacera par

$$(k)\quad \begin{cases} G_1(x,y)\alpha + G_2(x,y) = 0, & (29) \\ H_1 G_2^2 - H_2 G_1 G_2 + H_3 G_1^2 = 0. & (30) \end{cases}$$

En débarrassant l'équation (30) des facteurs étrangers (préalablement connus), on aura finalement le système

$$(l)\quad \begin{cases} G_1(x,y)\alpha + G_2(x,y) = 0, & (31) \\ K(x,y) = 0, & (32) \end{cases}$$

qui sera équivalent au système proposé (a') : l'équation (32) sera l'équation cherchée.

Nota. — Il est évident (puisqu'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final (l) peut se présenter sous la forme

$$(p)\quad \begin{cases} J(x,y,\alpha) = 0, & (33) \\ K(x,y) = 0, & (34) \end{cases}$$

le plus haut exposant de α étant, dans l'équation (33), supérieur à l'unité.

Points multiples [1]. — D'après le système [(26) et

---

[1] Il s'agit, bien entendu, des points multiples de la première classe. — Voir notre Mémoire *Historique et développement d'une méthode pour déterminer les singularités ordinaires d'un lieu géométrique défini par k équations*.

(27)], les points communs aux deux courbes représentées par

$$G_1(x, y) = 0, \quad G_2(x, y) = 0 \tag{35}$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système : il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de α qui sont racines de l'équation (27). Pour obtenir séparément les points multiples du lieu proposé (a'), il suffira de défalquer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères. Ajoutons, au sujet de ces courbes étrangères, que la détermination de leur degré de multiplicité, comme celle d'ailleurs des points multiples, suppose connue la connaissance de la forme du système final (l). Dans ce qui précède, nous avons essentiellement supposé que l'équation (31) de ce système final contenait seulement au *premier degré* le paramètre α.

III. — Application du premier problème.

Afin de mieux préciser les considérations précédentes, nous allons les développer à nouveau sur un cas particulier, celui où le lieu est défini par les équations

$$(S_1) \quad \begin{cases} A = A_1(x, y)\alpha^3 + A_2(x, y)\alpha^2 \\ \qquad + A_3(x, y)\alpha + A_4(x, y) = 0, & (36) \\ B = B_1(x, y)\alpha^3 + B_2(x, y)\alpha^2 \\ \qquad + B_3(x, y)\alpha + B_4(x, y) = 0. & (37) \end{cases}$$

Substituons à ce système le système

$$(S_2) \quad \begin{cases} M = 0, & (38) \\ A = 0, & (39) \end{cases}$$

obtenu en écrivant l'équation (36) sous la forme

$$\alpha^3 = -\frac{A_2\alpha^2 + A_3\alpha + A_4}{A_1},$$

et en substituant cette valeur de α^3 dans le premier terme de (37); on a introduit ainsi le lieu étranger défini par

$$(S_3) \quad \begin{cases} A_1(x,y) = 0, & (40) \\ A = 0, & (41) \end{cases}$$

c'est-à-dire par

$$(S_4) \quad \begin{cases} A_1(x,y) = 0, & (42) \\ A_2(x,y)\alpha^2 + A_3(x,y)\alpha + A_4(x,y) = 0, & (43) \end{cases}$$

ce qui représente *deux* fois la courbe ayant pour équation

$$A_1(x,y) = 0. \qquad (44)$$

Cela fait, le système (S_2) pouvant s'écrire

$$(S_5) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{\alpha(A_1B_3 - A_3B_1) + A_1B_4 - A_4B_1}{A_2B_1 - A_1B_2}, & (45) \\ A_1\alpha^3 + A_2\alpha^2 + A_3\alpha + A_4 = 0, & (46) \end{cases}$$

substituons-lui le système

$$(S_6) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{\alpha(A_1B_3 - A_3B_1) + A_1B_4 - A_4B_1}{A_2B_1 - A_1B_2}, & (47) \\ \left. \begin{array}{l} A_1\alpha\dfrac{\alpha(A_1B_3 - A_3B_1) + A_1B_4 - A_4B_1}{A_2B_1 - A_1B_2} \\ \qquad + A_2\alpha^2 + A_3\alpha + A_4 = 0, \end{array} \right\} & (48) \end{cases}$$

obtenu en écrivant le premier terme de (46) sous la forme $A_1\alpha^2 \times \alpha$ et remplaçant α^2 par sa valeur (45). On a introduit de la sorte le lieu étranger défini par

$$(S_7) \quad \begin{cases} \alpha(A_1B_3 - A_3B_1) + A_1B_4 - A_4B_1 = 0, & (49) \\ A_2B_1 - A_1B_2 = 0, & (50) \end{cases}$$

c'est-à-dire *une* fois la courbe ayant pour équation

$$A_2(x,y)B_1(x,y) - A_1(x,y)B_2(x,y) = 0. \qquad (51)$$

En effectuant les calculs, le système (S_6) s'écrit :

$$(S_8)\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} C = (A_2B_1 - A_1B_2)\alpha^2 + \alpha(A_3B_1 - A_1B_3) \\ \qquad\qquad + A_4B_1 - A_1B_4 = o, \end{array}\right\} & (52) \\ \left.\begin{array}{l} D = [A_1(A_1B_3 - A_3B_1) + A_2(A_2B_1 - A_1B_2)]\alpha^2 \\ \quad + [A_1(A_1B_4 - A_4B_1) + A_3(A_2B_1 - A_1B_2)]\alpha \\ \qquad\qquad + A_4(A_2B_1 - A_1B_2) = o; \end{array}\right\} & (53) \end{array}\right.$$

substituons-lui le système

$$(S_9)\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} C[A_1(A_1B_3 - A_2B_1) + A_2(A_2B_1 - A_1B_2)] \\ \qquad\qquad - D(A_2B_1 - A_1B_2) = o, \end{array}\right\} & (54) \\ \qquad C = o, & (55) \end{array}\right.$$

comprenant le lieu étranger défini par

$$(S_{10})\left\{\begin{array}{ll} A_2B_1 - A_1B_2 = o, & (56) \\ C = o, & (57) \end{array}\right.$$

c'est-à-dire par

$$(S_{11})\left\{\begin{array}{ll} A_2B_1 - A_1B_2 = o, & (58) \\ (A_3B_1 - A_1B_3)\alpha + A_4B_1 - A_1B_4 = o, & (59) \end{array}\right.$$

ce qui représente encore *une* fois la courbe ayant pour équation

$$A_2(x, y).\,B_1(x, y) - A_1(x, y).\,B_2(x, y) = o. \quad (60)$$

Cela fait, le système (S_9) pouvant s'écrire

$$(S_{12})\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \{(A_3B_1 - A_1B_3)[A_1(A_1B_3 - A_3B_1) + A_2(A_2B_1 - A_1B_2)] \\ -[A_1(A_1B_4 - A_4B_1) + A_3(A_2B_1 - A_1B_2)](A_2B_1 - A_1B_2)\} \end{array}\right)\alpha \\ + \{(A_4B_1 - A_1B_4)[A_1(A_1B_3 - A_3B_1) + A_2(A_2B_1 - A_1B_2)] \\ \qquad\qquad - A_4(A_2B_1 - A_1B_2)^2\} = o, \end{array}\right\} & (61) \\ (A_2B_1 - A_1B_2)\alpha^2 + (A_3B_1 - A_1B_3)\alpha + A_4B_1 - A_1B_4 = o, & (62) \end{array}\right.$$

tirons de l'équation (61) la valeur de α pour la substituer dans (62); en écrivant cette équation (61) sous la forme $\alpha X + Y = o$, nous aurons le système final

$$(S_{13})\left\{\begin{array}{ll} \alpha X + Y = o. & (63) \\ \left.\begin{array}{l} (A_2B_1 - A_1B_2)Y^2 - XY(A_3B_1 - A_1B_3) \\ \qquad\qquad + (A_4B_1 - A_1B_4)X^2 = o \end{array}\right\} & (64). \end{array}\right.$$

qui sera tel que la relation (64) se composera :

1° De *deux* fois l'équation $A_1(x, y) = 0$;

2° De *deux* fois l'équation $A_2 B_1 - A_1 B_2 = 0$;

3° De l'équation du lieu cherché.

C'est ce que l'on vérifie, en effet, sans peine, en employant les notations abrégées suivantes :

$$a = A_2 B_1 - A_1 B_2, \quad b = A_3 B_1 - A_1 B_3, \quad c = A_4 B_1 - A_1 B_4,$$
$$a' = a A_2 - b A_1, \quad b' = a A_3 - c A_1, \quad c' = a A_4,$$
$$d = A_2 B_4 - A_4 B_2, \quad l = A_3 B_2 - A_2 B_3, \quad m = A_4 B_3 - A_3 B_4.$$

Il suffit de reprendre le calcul à partir des équations (52, 53), d'observer que l'équation (64), qui se présente sous la forme

$$a[(ac' - ca')^2 + (ab' - ba')(cb' - bc')] = 0, \qquad (65)$$

peut aussi s'écrire en remplaçant a', b', c' par leurs valeurs

$$a^2 \begin{bmatrix} a(aA_4 - cA_2)^2 + 2bc(aA_4 - cA_2) \\ \times (aA_3 - bA_2 - cA_1)(cA_3 - bA_4) \\ + A_1 b^2 (cA_3 - bA_4) - A_1 c^2 (aA_3 - cA_1) \end{bmatrix} = 0, \qquad (66)$$

d'où l'on déduit immédiatement, en effectuant chaque parenthèse,

$$a^2 A_1^2 (ad^2 + mb^2 + lc^2 + 2bcd + alm) = 0; \qquad (67)$$

en sorte que le système proposé est équivalent au système

$$(S_{14}) \quad \begin{cases} \alpha X + Y = 0 \quad ([1]), & (68) \\ ad^2 + mb^2 + lc^2 + 2bcd + alm = 0. & (69) \end{cases}$$

Points doubles. — Les points doubles sont les points communs aux deux courbes représentées, car

$$X = 0, \quad Y = 0, \qquad (70)$$

([1]) On va voir que X et Y doivent contenir le facteur $A_1(x, y)$ que l'on devra partant supprimer.

à condition de supprimer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères pour lesquelles il correspond à chacun de leurs points au moins deux valeurs du paramètre (α), c'est-à-dire, ici, tous les points de la courbe représentée par $A_1(x, y) = 0$.

IV. — Deuxième problème.

Problème. — *Éliminer* α *entre les deux équations*

$$(S_1)\quad \begin{cases} A(x, y, z, \alpha) = 0, & (71) \\ B(x, y, z, \alpha) = 0, & (72) \end{cases}$$

supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples de la surface qu'elles définissent.

Solution. — Il suffit de refaire exactement les mêmes calculs que dans le *premier problème,* sauf à remarquer qu'au lieu d'introduire des *courbes étrangères* on introduit des *surfaces étrangères* définies par des équations de la forme

$$(S_2)\quad \begin{cases} N(x, y, z) = 0, & (73) \\ M_1(x, y, z)\alpha^{\mu} + M_2(x, y, z)\alpha^{\mu-1} \\ \qquad + M_3(x, y, z)\alpha^{\mu-2} + \ldots = 0. & (74) \end{cases}$$

Points multiples. — En procédant comme nous venons de le dire, on rencontre, avant de parvenir au système final, des systèmes de la forme

$$(S_3)\quad \begin{cases} C_1(x, y, z)\alpha^2 + C_2(x, y, z)\alpha + C_3(x, y, z) = 0, & (75) \\ D_1(x, y, z)\alpha^3 + D_2(x, y, z)\alpha^2 \\ \qquad + D_3(x, y, z)\alpha + D_4(x, y, z) = 0, & (76) \end{cases}$$

$$(S_4)\quad \begin{cases} C_1(x, y, z)\alpha^2 + C_2(x, y, z)\alpha + C_3(x, y, z) = 0, & (77) \\ E_1(x, y, z)\alpha + E_2(x, y, z) = 0. & (78) \end{cases}$$

Il résulte de là :

1° Que les points communs aux trois surfaces représentées par

$$C_1(x, y, z) = 0, \quad C_2(x, y, z) = 0, \quad C_3(x, y, z) = 0 \qquad (79)$$

sont des *points triples* du lieu (S_3) : il correspond, en effet, à chacun de ces points, *trois* valeurs de α qui sont racines de l'équation (76) ;

2° Que les points communs aux deux surfaces représentées par

$$E_1(x, y, z) = 0, \quad E_2(x, y, z) = 0 \qquad (80)$$

sont des *points doubles* du lieu (S_4) : il correspond, en effet, à chacun de ses points, *deux* valeurs de α qui sont racines de l'équation (77) [1].

V. — Troisième problème.

Problème. — Éliminer α, β entre les trois équations

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{aligned} &A(x, y, \alpha, \beta) = 0, && (1) \\ &B(x, y, \alpha, \beta) = 0, && (2) \\ &C(x, y, \alpha, \beta) = 0, && (3) \end{aligned} \right.$$

supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples du lieu qu'elles définissent.

Solution. — 1° On ordonnera les équations (1, 2) par rapport à α :

$$(S_2) \quad \left\{ \begin{aligned} &A = A_1(x, y, \beta)\alpha^m + A_2(x, y, \beta)\alpha^{m-1} \\ &\qquad + A_3(x, y, \beta)\alpha^{m-2} + \ldots = 0, && (4) \\ &B = B_1(x, y, \beta)\alpha^n + B_2(x, y, \beta)\alpha^{n-1} \\ &\qquad + B_3(x, y, \beta)\alpha^{n-2} + \ldots = 0, && (5) \\ &C(x, y, \alpha, \beta) = 0. && (6) \end{aligned} \right.$$

---

[1] Parmi ces points doubles, ceux qui se trouvent sur la surface représentée par

$$C_2^2 - 4C_1C_3 = 0$$

sont de rebroussement.

2° On considérera β comme un coefficient et l'on éliminera, entre les équations (4), (5), par le procédé suivi pour résoudre le *premier problème,* le paramètre α, ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_3)\quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (7) \\ E(x, y, \beta) = 0, & (8) \\ C(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (9) \end{cases}$$

qui se composera du système (S_2), plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_4)\quad \begin{cases} F(x, y, \beta) = 0, & (10) \\ G(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (11) \\ C(x, y, \alpha, \beta) = 0. & (12) \end{cases}$$

3° On tirera de l'équation (7) la valeur de (α) pour la substituer dans (9), ce qui conduira au système

$$(S_5)\quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (13) \\ E(x, y,)\, \beta = 0, & (14) \\ H(x, y, \beta) = 0. & (15) \end{cases}$$

4° On éliminera, toujours par le procédé suivi dans la solution du *premier problème,* le paramètre β entre les équations (14), (15), ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_6)\quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (16) \\ G_1(x, y)\beta + G_2(x, y,) \;= 0, & (17) \\ I(x, y) = 0, & (18) \end{cases}$$

qui se composera du système (S_5), plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_7)\quad \begin{cases} D'_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (19) \\ J(x, y,) = 0, & (20) \\ K(x, y) = 0. & (21) \end{cases}$$

5° Soient $W(x, y) = 0$ l'équation (18) débarrassée des facteurs étrangers, et $W_1(x,y)\alpha + V_2(x,y) = 0$ l'équation obtenue en remplaçant dans (16) la lettre β par sa valeur tirée de (17); le système

$$(S_8)\quad \begin{cases} V_1(x,y)\alpha + V_2(x,y) = 0, & (23)\\ G_1(x,y)\beta + G_2(x,y) = 0, & (23)\\ W(x,y) = 0 & (24)\end{cases}$$

sera équivalent au système proposé (S_1), et l'équation (24) sera l'équation cherchée.

Nota I. — Il est très important d'observer que, si l'on ne suivait pas exactement l'*ordre* que nous venons d'indiquer, on pourrait fort bien introduire *tout le plan* comme lieu étranger, et partant l'élimination deviendrait impossible dans la suite. C'est, en effet, ce qui arriverait si l'on écrivait, par exemple, l'équation (4) sous la forme

$$\alpha^m = -\frac{A_2(x,y,\beta)\alpha^{m-1} + A_3(x,y,\beta)\alpha^{m-2} + A_4(x,y,\beta)\alpha^{m-3} + \ldots}{A_1(x,y,\beta)}, \quad (25)$$

et si l'on substituait *à la fois* cette valeur de α^m dans les *deux* autres équations; on introduirait de la sorte tout le plan défini par les équations

$$(S_9)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} A_2(x,y,\beta)\alpha^{m-1} + A_3(x,y,\beta)\alpha^{m-2}&\\ + A_4(x,y,\beta)\alpha^{m-3} + \ldots = 0,&\end{aligned}\right\} & (26)\\ A_1(x,y,\beta) = 0, & (27)\end{cases}$$

contenant *deux* paramètres variables α et β.

Nota II. — Il est évident (puisqu'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final (S_8) peut se présenter sous la forme

$$(S_{10})\quad \begin{cases} V_1(x,y,\alpha,\beta) = 0, & (28)\\ V_2(x,y,\alpha,\beta) = 0, & (29)\\ W(x,y) = 0, & (30)\end{cases}$$

les plus hauts exposants de α, β étant, dans les équations (28), (29), supérieurs à l'unité.

Points multiples. — Avant de parvenir au système (S_6), on rencontre un système de la forme

$$(S_{11}) \quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (31) \\ G_1(x, y)\beta + G_2(x, y) = 0, & (32) \\ M_1(x, y)\beta^2 + M_2(x, y)\beta + M_3(x, y) = 0. & (33) \end{cases}$$

Les points communs aux deux courbes représentées par

$$G_1(x, y) = 0, \quad G_2(x, y) = 0 \qquad (34)$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système; il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de β qui sont racines de l'équation (33), et, partant, à cause de (31), *deux* valeurs de α; il est d'ailleurs bien évident que, pour obtenir séparément les points multiples du lieu proposé (S_1), on devra défalquer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères pour lesquelles il correspond à chacun de leurs points au moins deux valeurs des paramètres α et β.

VI. — Quatrième problème.

Problème. — *Éliminer* α, β, γ *entre les équations*

$$(S_1) \quad \begin{cases} A(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (1) \\ B(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (2) \\ C(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (3) \\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (4) \end{cases}$$

supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples du lieu qu'elles définissent.

Solution. — 1° On considérera γ comme un coefficient et l'on éliminera, entre les équations (1), (2), (3), par le procédé suivi pour résoudre le *troisième problème,* les paramètres α, β, ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_2)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (5)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (6)\\ G(x, y, \gamma) = 0, & (7)\\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (8) \end{cases}$$

qui se composera du système (S_1), plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_3)\quad \begin{cases} H(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (9)\\ I(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (10)\\ J(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (11)\\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0. & (12) \end{cases}$$

2° On tirera des équations (5), (6) les valeurs de α, β pour les porter dans (8), ce qui conduira au système

$$(S_4)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (13)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (14)\\ G(x, y, \gamma) = 0, & (15)\\ K(x, y, \gamma) = 0. & (16) \end{cases}$$

3° On éliminera, par le procédé employé dans la solution du *premier problème*, le paramètre γ, entre les équations (15), (16), ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_5)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (17)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (18)\\ M_1(x, y)\gamma + M_2(x, y) = 0, & (19)\\ N(x, y) = 0, & (20) \end{cases}$$

qui se composera du système (S_4), plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_6)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (21)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (22)\\ P(x, y, \gamma) = 0, & (23)\\ Q(x, y) = 0. & (24) \end{cases}$$

4° Soient $W(x,y) = 0$ l'équation (20) débarrassée des facteurs étrangers, et

$$V_1(x,y)\alpha + V_2(x,y) = 0, \tag{25}$$
$$U_1(x,y)\beta + V_2(x,y) = 0 \tag{26}$$

les équations obtenues en remplaçant dans (17), (18) la lettre γ par sa valeur tirée de (19), le système

$$(S_7)\quad \begin{cases} V_1(x,y)\alpha + V_3(x,y) = 0, & (27) \\ U_1(x,y)\beta + V_2(x,y) = 0, & (28) \\ M_1(x,y)\gamma + M_2(x,y) = 0, & (29) \\ W(x,y) = 0 & (30) \end{cases}$$

sera équivalent au système (S_1), et l'équation

$$W(x,y) = 0 \tag{31}$$

sera l'équation cherchée.

Nota. — Il est évident (puisqu'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final (S_7) peut se présenter sous la forme

$$(S_8)\quad \begin{cases} R_1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = 0, & (32) \\ R_2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = 0, & (33) \\ R_3(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = 0, & (34) \\ W(x,y) = 0, & (35) \end{cases}$$

les plus hauts exposants de α, β, γ étant, dans les équations (32), (33), (34), supérieurs à l'unité; on conçoit de plus, sans peine, que l'on puisse choisir les équations de manière que les courbes représentées par (32), (33), (34) n'aient jamais de points communs, quelles que soient les valeurs attribuées à α, β, γ; dans ce cas, bien que l'équation (35) puisse représenter une courbe réelle, le système (S_1) ne définit pas un *lieu* proprement dit, c'est-à-dire que les courbes représentées par (1), (2), (3), (4) ne se croisent jamais en un même point, quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres α, β, γ (¹).

Points multiples. — Avant de parvenir au système (S_5), on rencontre un système de la forme

$$(S_9)\quad\left\{\begin{array}{ll} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (36)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (37)\\ M_1(x, y)\gamma + M_2(x, y) = 0, & (38)\\ T_1(x, y)\gamma^2 + T_2(x, y)\gamma + T_3(x, y) = 0; & (39)\end{array}\right.$$

les points communs aux deux courbes représentées par

$$M_1(x, y) = 0, \quad M_2(x, y) = 0 \qquad (40)$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système; il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de γ qui sont racines de l'équation (39), et, partant, à cause de (36), (37), deux valeurs de α et β. Pour obtenir uniquement les points multiples du lieu proposé, on devra supprimer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères.

Observation finale. — Les développements précédents suffisent évidemment pour démontrer la généralité, à *tous* les cas possibles, de la méthode suivie.

Addition. — Nous développerons dans une Communication spéciale les calculs relatifs aux points multiples

---

(¹) En voici un exemple :

$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 1,$$
$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 2,$$
$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 3,$$
$$W(x, y) = 0.$$

des lieux (A) et (B) définis par

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}(\alpha, \beta) = 0, \\[4pt] \dfrac{x}{\dfrac{d\mathrm{U}}{d\alpha}} = \dfrac{y}{\dfrac{d\mathrm{U}}{d\alpha}} = \dfrac{1}{\dfrac{d\mathrm{U}}{dt}}; \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}(\alpha, \beta) = 0, \\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \mathrm{R}^2 = 0, \\[4pt] \dfrac{x-\alpha}{\dfrac{d\mathrm{U}}{d\alpha}} = \dfrac{y-\beta}{\dfrac{d\mathrm{U}}{d\beta}}, \end{array}\right.$$

points multiples permettant de déterminer, comme nous l'avons prouvé dans le Mémoire déjà cité, *Historique et développement*, etc., les points de contact des tangentes doubles et les centres des cercles de rayon R doublement tangents à la courbe représentée par

$$\mathrm{U}(x, y) = 0 \ (^1).$$

Nota. — On obtiendra le lieu des centres des sphères de rayon R (²) doublement tangentes à la surface représentée par

$$\mathrm{U}(x, y, z) = 0,$$

en cherchant la ligne double de la surface définie par

$$\mathrm{U}(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \mathrm{R}^2 = 0,$$
$$\frac{x-\alpha}{\dfrac{d\mathrm{U}}{d\alpha}} = \frac{y-\beta}{\dfrac{d\mathrm{U}}{d\beta}} = \frac{z-\gamma}{\dfrac{d\mathrm{U}}{d\gamma}}.$$

(¹) Aux points de rebroussement du lieu (A) correspondent les points d'inflexion de la courbe U, et aux points de rebroussement du lieu (B) correspondent les points de contact des cercles de rayon R osculateurs à cette même courbe.

(²) Si l'on suppose, à la fin du calcul, $\mathrm{R} = 0$, on a la focale de la surface.