Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Biehler

Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 537-546

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__537_1>

THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES ALGEBRIQUES (1);

PAR M. CH. BIEHLER.

II.

6. Désignons par a le coefficient angulaire de la direction considérée et soit $y = ax + \frac{1}{\lambda}$ une parallèle à cette direction; formons le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre de cette droite avec la courbe; il suffira, pour obtenir l'équation du faisceau, d'éliminer z entre les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & f_m(x,y) + z f_{m-1}(x,y) + \ldots \\ & \qquad + z^{m-1} f_1(x,y) + z^m f_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

et

$$\lambda(y - ax) = z;$$

on obtient ainsi l'équation

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} & f_m(x,y) + \lambda(y-ax) f_{m-1}(x,y) \\ & \quad + \lambda^2 (y-ax)^2 f_{m-2}(x,y) + \ldots + \lambda^m (y-ax)^m f_0 = 0 \end{aligned}\right.$$

(1) *Voir* même Tome, p. 97 et 489.

ou bien

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & f_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \lambda\left(\frac{y}{x} - a\right) f_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ & \quad + \lambda^2\left(\frac{y}{x} - a\right)^2 f_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots + \lambda^m\left(\frac{y}{x} - a\right)^m f_0 = 0; \end{aligned}\right.$$

et si l'on pose

$$f_\mu\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi_\mu\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{y}{x} - a = t,$$

l'équation (3) prendra la forme

$$(4)\quad \varphi_m(a+t) + \lambda t \varphi_{m-1}(a+t) + \lambda^2 t^2 \varphi_{m-2}(a+t) + \ldots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0,$$

ou bien

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & \varphi_m(a) + t\varphi'_m(a) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''_m(a) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}_m(a) \\ & \quad + \lambda t\left[\varphi_{m-1}(a) + t\varphi'_{m-1}(a) + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}_{m-1} a\right] + \ldots \\ & \quad + \lambda^{m-1} t^{m-1}\left[\varphi_1(a) + t\varphi'_1(a)\right] + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (5) du paragraphe précédent, où l'on a supposé que la direction des points à l'infini est celle de l'axe des y; elle n'en diffère qu'en ce que les quantités $\varphi^{(p)}_\mu(0)$ sont remplacées dans la première par les quantités correspondantes $\varphi^{(p)}_\mu(a)$.

La discussion de cette nouvelle équation (5) est donc identique à celle que nous avons déjà faite, et les figures nouvelles ne diffèrent de celles qui ont été précédemment obtenues qu'en ce qu'elles présentent, par rapport à la droite $y = ax$, la disposition que les premières présentent par rapport à l'axe des y; il est donc superflu d'y revenir.

7. Nous allons, en terminant, faire une remarque sur

les valeurs approchées des racines qui nous ont permis de construire les branches paraboliques. La première de ces valeurs est fournie par la formule (8), savoir

$$t = -\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0)} \times \lambda,$$

ou

$$\frac{t}{1.2}\varphi''_m(0) + \lambda\varphi_{m-1}(0) = 0;$$

dans cette formule

$$t = \frac{x}{y}, \quad \lambda = \frac{1}{x};$$

en substituant ces valeurs, il vient

$$(a) \qquad \frac{x^2}{12}\varphi''_m(0) + y\varphi_{m-1}(0) = 0.$$

La formule (8) représente dans un système particulier de coordonnées une parabole du second degré, car la formule (a) représente la même courbe en coordonnées cartésiennes; remarquons encore que le groupe de termes

$$\frac{x^2}{12}\varphi''_m(0) + y\varphi_{m-1}(0)$$

existe dans l'équation de la courbe proposée, car

$$f_m(x, y) = y^m f_m\left(\frac{x}{y}, 1\right) = y^m \varphi_m\left(\frac{x}{y}\right);$$

or

$$y^m \varphi_m\left(\frac{x}{y}\right) = y^m\left[\varphi_m(0) + \frac{x}{y}\varphi'_m(0) + \frac{x^2}{y^2}\frac{\varphi''_m(0)}{1.2} + \ldots\right];$$

par suite,

$$f_m(x, y) = y^m\varphi_m(0) + y^{m-1}x\varphi'_m(0) + y^{m-2}x^2\frac{\varphi''_m(0)}{12} + \ldots + \frac{x^m\varphi^{(m)}(0)}{m!};$$

les quantités

$$\varphi_m(0)\ \varphi'_m(0)\ \ldots\ \varphi^{(\mu)}_m(0)$$

sont donc les coefficients de la fonction homogène de degré m, $f_m(x, y)$.

On a de même

$$f_{m-1}(x,y) = y^{m-1}\varphi_{m-1}(0) + y^{m-2}x\varphi_{m-1}(0) + \ldots + x^{m-1}\varphi^{(m-1)}_{m-1}(0);$$

par suite, ce sont les deux termes

$$y^{m-2}x^2\frac{\varphi''_m(0)}{1\,2} + y^{m-1}\varphi_{m-1}(0)$$

qui fournissent, quand on égale leur somme à zéro, l'équation de la parabole du second degré que l'on peut considérer comme asymptotique de la courbe dans la direction de l'axe des y ; ce sont donc les deux seuls termes précédents qui déterminent la forme de la courbe à l'infini dans la direction considérée.

Les autres valeurs approchées des racines donnent lieu à des remarques semblables. Dans la *fig.* 2, les points à l'infini dans la direction de l'axe des y sont fournis par la parabole [*voir* la formule (9)]

$$(b)\qquad \frac{x^q}{q!}\varphi^{(q)}_m(0) + y^{q-1}\varphi_{m-1}(0) = 0$$

obtenue au moyen des termes

$$y^{m-q}x^q\frac{\varphi^{(q)}_m(0)}{q!} + y^{m-1}\varphi_{m-1}(0)$$

de l'équation proposée.

Dans la *fig.* 3, c'est la parabole

$$(c)\qquad x^3\frac{\varphi'''_m(0)}{1\,2\,3} + y\varphi_{m-2}(0) = 0$$

qui nous donne la formule de la courbe ; elle est obtenue en prenant dans l'équation de la courbe les termes

$$y^{m-3}x^3\frac{\varphi'''_m(0)}{1\,2\,3}+y^{m-2}\varphi_{m-2}(0).$$

Les *fig.* 4 et 5 sont fournies par les paraboles

$$x^2=\tau_0\times y \quad x^2=\tau_0\times y,$$

dont l'équation

$$(x^2-\tau_0\times y)(x^2-\tau_1 y)=0$$

est donnée par le groupe

$$y^{m-4}x^4\frac{\varphi^{(4)}_m(0)}{4!}+y^{m-3}x^2\frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1\,2}+y^{m-2}\varphi_{m-2}(0),$$

qui figure dans l'équation proposée, et ainsi des autres.

La méthode que nous avons développée a donc pour effet de nous donner le groupe des termes de l'équation proposée, qui déterminent la forme de la courbe à l'infini, quand il existe des branches paraboliques dans la direction de l'axe des y.

Quand la direction est autre que celle de l'un des axes de coordonnées, c'est à l'équation (5) du § II qu'il faut appliquer ce que nous venons de dire de l'équation de la courbe, après avoir substitué toutefois aux variables t et λ, qui y figurent, leurs valeurs en x et y données par les formules

$$\frac{y}{x}-a=t, \quad \lambda(y-ax)=1.$$

Ce que nous venons de dire des branches paraboliques s'applique également aux branches hyperboliques qui accompagnent les asymptotes, et aux branches de courbes qui se croisent en un point situé à distance finie, dont la construction a été étudiée dans la première Partie.

On peut donc dire, d'une manière générale, que la *méthode que nous avons employée fait dépendre la construction de la courbe proposée en un point à distance finie ou à l'infini de celle d'une autre courbe plus simple dont l'équation s'obtient en égalant à zéro un groupe de termes de l'équation proposée ou d'une équation déduite de la proposée par une transformation simple.* Le groupe des termes qui forment le premier membre de l'équation de la courbe auxiliaire fait partie de l'équation même de la courbe, lorsque le point autour duquel on construit la courbe est à l'origine et que les tangentes à la courbe en ce point sont les axes de coordonnées; cela a encore lieu si le point est à l'infini et si les axes de coordonnées sont les asymptotes mêmes de la courbe dans le cas où le point est hyperbolique, et si la direction des axes de coordonnées est la direction du point multiple à l'infini, dans le cas où ce point est parabolique. Dans les autres cas, le premier membre de l'équation de la courbe auxiliaire s'obtient en égalant à zéro un groupe de termes appartenant à l'équation transformée.

Nous allons, en terminant, appliquer ce qui précède à un exemple.

Supposons qu'on ait à construire la courbe

$$x^6 - 5xy^4 + 6y^3 - x^2 = 0.$$

1° Construisons-la d'abord autour de l'origine; on voit que l'axe des y est une tangente de rebroussement. Coupons la courbe par la droite $x = \lambda y$; l'équation de la courbe débarrassée du facteur y^2y' devient

$$\lambda^6 y^4 - 5\lambda y^3 + 6y - \lambda^2 = 0;$$

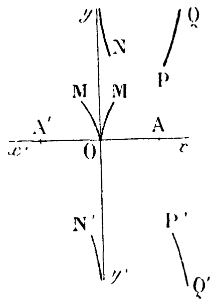
cette équation, pour de petites valeurs de y et de λ, se réduit à

$$6y - \lambda^2 = 0,$$

car le terme $\lambda^6 y^4$ est infiniment petit devant chacun des terme $6y$ et $-\lambda^2$ et le terme $-5\lambda y^3$ est infiniment petit devant $6y$.

Pour des valeurs positives et négatives de λ, y est po-

Fig. 9.



sitif, par suite la courbe affecte autour de l'origine la forme de MOM' (*fig.* 9).

$$6y - \lambda^2 = 0$$

est l'équation de la courbe auxiliaire, qui devient en coordonnées rectilignes

$$6y^3 - x^2 = 0.$$

On voit qu'elle est formée en égalant à zéro le groupe des termes $6y^3 - x^2$ de l'équation proposée.

2° Construisons en second lieu la courbe autour de ses asymptotes. Il n'y a qu'une seule direction asymptotique, qui est celle de l'axe des y; l'équation de la courbe pouvant s'écrire

$$-5xy^4 + 6y^3 + x^6 - x^2 = 0,$$

on voit que l'axe des y est asymptote. Coupons la courbe par des parallèles à l'asymptote, à savoir par $x = \varepsilon$, et posons $y = \frac{1}{z}$, il viendra

$$-5\varepsilon + 6z + z^4(\varepsilon^6 - \varepsilon^2) = 0;$$

cette équation, pour de petites valeurs de z et de ε, se réduit évidemment à

$$-5\varepsilon + 6z = 0.$$

Pour des valeurs positives de ε, z et par suite y sont positifs; pour des valeurs négatives de ε, y est négatif; on obtient donc les branches yN, y'N' (*fig.* 9). L'équation

$$-5\varepsilon + 6z = 0$$

est celle de la courbe auxiliaire; en remplaçant ε et z par leur valeur

$$x = \varepsilon, \quad z = \frac{1}{y},$$

elle devient

$$-5xy + 6 = 0;$$

c'est l'équation d'une hyperbole : on l'obtient en égalant à zéro le groupe des termes $-5xy^4 + 6y^3$ de l'équation proposée.

3° Cherchons maintenant les branches paraboliques dans la direction de l'axe des y. Coupons la courbe par la droite $x = \frac{1}{\lambda}$ et formons l'équation du faisceau des rayons qui joignent l'origine aux points de rencontre de la droite et de la courbe; il faut pour cela éliminer z entre les équations

$$x^6 - 5zxy^4 + 6z^3y^3 - z^4x^2 = 0,$$

$$x = \frac{z}{\lambda},$$

ce qui donne

$$x^6 - 5\lambda x^2y^4 + 6\lambda^3x^3y^3 - \lambda^4x^6 = 0.$$

Posons maintenant $x = ty$; cette équation deviendra une équation entre t et λ, savoir:

$$t^6 - 5\lambda t^2 + 6\lambda^3 t^3 - \lambda^4 t^6 = 0,$$

qui, pour de petites valeurs de t et de λ, se réduit à

$$t^6 - 5\lambda t^2 = 0,$$
$$t^4 - 5\lambda = 0.$$

λ ne peut recevoir que des valeurs positives pour que t soit réel, et à chaque valeur de λ correspondent deux valeurs de t de signes contraires; on obtient ainsi les branches PQ, P'Q' (*fig.* 9). L'équation $t^4 - 5\lambda = 0$ représente l'équation de la parabole auxiliaire; elle devient en coordonnées rectilignes

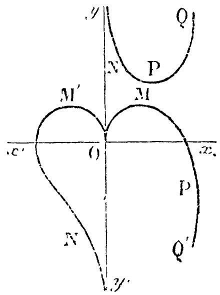
$$x^5 - 5y^4 = 0,$$

et se tire de l'équation proposée en égalant à zéro le groupe formé par ses deux premiers termes

$$x^6 - 5xy^4.$$

Si l'on remarque que la courbe rencontre l'axe des x aux points $x = \pm 1$, et qu'elle ne rencontre l'axe des y

Fig. 10.



qu'à l'origine et à l'infini; que si de plus on coupe la courbe par la droite $x = \lambda$ et si l'on remarque que l'équation en y ne peut avoir de racines égales qu'autant qu'une équation du neuvième degré en λ est satisfaite, on en conclut que les branches yN et PQ doivent se raccorder; il en est de même de OM et P′Q′, ainsi que de OM′ et N′y'. On obtient donc pour la courbe une forme analogue à celle de la *fig.* 10.