Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 515-526

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__515_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1272

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 288),

PAR UN ANONYME.

Dans un tétraèdre ABCD *dont les faces sont équivalentes :*

1° *Les faces sont égales ;*

2° *Le centre de gravité du tétraèdre coïncide avec les centres des sphères inscrite et circonscrite, et d'une sphère à la fois tangente aux quatre hauteurs du tétraèdre et aux perpendiculaires menées à chaque face par le point de concours de ses hauteurs.*

(COTTEREAU.)

J'établirai d'abord le lemme suivant :

1. Soient XY, X′Y′ deux droites, non situées dans un même plan, et PP′ leur perpendiculaire commune (*). Si l'on prend sur l'une de ces deux droites, par exemple, sur XY, à partir du point P, où XY est rencontrée par PP′, des distances égales PA, PB, les points A, B, ainsi

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

déterminés, seront également distants de l'autre droite $X'Y'$.

Démonstration. — Du point P' je mène une parallèle xy à XY, et des points A, B des perpendiculaires Aa, Bb à xy. Ces perpendiculaires sont parallèles et égales à PP' : on a donc $P'a = P'b$ et $Aa = Bb$.

La droite PP' étant perpendiculaire au plan des deux droites xy, $X'Y'$, il en est de même des parallèles Aa, Bb, à PP'. Il s'ensuit que, si a', b' représentent les projections de a, b sur $X'Y'$, les droites Aa' et Bb' seront perpendiculaires à $X'Y'$.

Or, $aa' = bb'$, puisque P' est le milieu de ab, et $Aa = Bb$: donc les triangles rectangles Aaa', Bbb' sont égaux, par conséquent $Aa' = Bb'$; ce qu'il fallait démontrer.

2. Inversement, si les distances Aa', Bb' des points A, B à $X'Y'$ sont égales entre elles, les points A, B seront également distants du point P. Car il est facile de voir, d'après ce qui précède, que l'inégalité des distances PA, PB entraîne celle des distances Aa', Bb'.

Nous allons faire application de cette réciproque à la proposition 1272.

3. Désignons par MN la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées AB, CD du tétraèdre considéré [1]. Les triangles ACD, BCD, de même base CD, étant par hypothèse équivalents, ont nécessairement des hauteurs égales; ainsi, les deux points A, B de AB, sont équidistants de la droite CD : donc le point M est le milieu de l'arête AB. De même N est le milieu de CD. Ainsi, dans un tétraèdre dont les faces sont équivalentes, la

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées est perpendiculaire à ces deux arètes.

Si P et Q sont les milieux de deux autres arêtes opposées AD, BC, les deux droites MN, PQ diagonales d'un parallélogramme MPNQ se couperont mutuellement en parties égales en un point O, qui sera également distant des quatre sommets A, B, C, D, parce qu'il appartient à des droites perpendiculaires aux milieux des arêtes AB, AD, DC, BC. Dans les triangles rectangles OMA, ONC, on a $OA = OC$, et $OM = ON$, d'où $MA = NC$, $AB = CD$; donc, dans un tétraèdre dont les faces sont équivalentes, les arêtes opposées sont deux à deux égales entre elles, et par conséquent :

1° Les faces sont égales, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun;

2° Le point O milieu de MN est, comme on sait, le centre de gravité du tétraèdre. Ses distances aux faces sont respectivement égales aux quarts des hauteurs correspondantes du tétraèdre. Mais les faces étant équivalentes, ces hauteurs sont égales entre elles : donc le point O est équidistant des quatre faces, c'est-à-dire qu'il coïncide avec le centre de la sphère inscrite. L'égalité des droites OA, OB, OC, OD montre qu'il coïncide aussi avec le centre de la sphère circonscrite.

Soient :

AH la hauteur du tétraèdre, menée du sommet A;

OF perpendiculaire sur AH, et par conséquent parallèle au plan BCD;

o la projection de O sur le plan BCD, ou le centre du cercle circonscrit au triangle BCD;

g le point d'intersection de la droite AO prolongée, et du plan BCD, ou le centre de gravité du triangle BCD;

h le point de concours des hauteurs de BCD;

G le point où la droite OF est rencontrée par la perpendiculaire au plan BCD, élevée au point h.

D'après des propositions connues, on a $oh = 3.og$ et $o\mathrm{H} = 3.og$, d'où $oh = o\mathrm{H}$, et $\mathrm{OG} = \mathrm{OF}$.

Mais, dans le triangle rectangle AOF, l'hypoténuse OA est le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, et le côté $\mathrm{AF} = \frac{3}{4}\mathrm{AH}$, conserve la même grandeur pour chacune des quatre hauteurs du tétraèdre; il en est, par conséquent, de même de OF; donc, la sphère, dont O est le centre, et $\mathrm{OF} = \mathrm{OG}$, le rayon, est à la fois tangente aux quatre hauteurs du tétraèdre et aux perpendiculaires élevées aux faces par les points de concours de leurs trois hauteurs.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1283

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 384),

PAR M. MORET-BLANC.

D'un point P *pris sur la tangente en* C *à un cercle, on mène une sécante* PAB *telle que la surface du triangle* ABC *soit maximum; trouver l'enveloppe de cette sécante quand le point* P *se meut sur la tangente.*

(FAUQUEMBERGUE.)

Je prends la tangente pour axe des y, et le diamètre du point de contact pour axe des x.

Soient

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

l'équation de la circonférence, et

$$y = mx + \beta$$

celle de la sécante issue du point P.

En appelant x_1, y_1; x_2, y_2 les coordonnées des points d'intersection, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{S.ABC} &= \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ &= \tfrac{1}{2}[x_1(mx_2+\beta) - x_2(mx_1+\beta)] = \tfrac{1}{2}\beta(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

x_1 et x_2 sont les racines de l'équation

$$(1+m^2)x^2 - 2(a - m\beta)x + \beta^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a - m\beta \pm \sqrt{a^2 - \beta^2 - 2am\beta}}{1+m^2}$$

et par suite

$$\mathrm{S} = \frac{\beta\sqrt{a^2 - \beta^2 - 2am\beta}}{1+m^2},$$

en donnant au radical le signe de β.

Égalant à zéro la dérivée par rapport à m, on a

$$\mathrm{S}' = \frac{\beta[3a\beta m^2 - 2(a^2 - \beta^2)m - a\beta]}{(1+m^2)^2\sqrt{a^2 - \beta^2 - 2am\beta}} = 0,$$

ou

$$3a\beta m^2 - 2(a^2 - \beta^2)m - a\beta = 0,$$

d'où

$$m = \frac{a^2 - \beta^2 \pm \sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}}{3a\beta}.$$

Pour $m = 0$, la dérivée étant de signe contraire à β, il faudra prendre le signe inférieur ou le signe supérieur, suivant que β sera positif ou négatif.

En reportant cette valeur de m dans l'équation de la sécante, on a, en chassant le dénominateur,

$$(x - 3a)\beta^2 + 3a\beta y - a^2 x = \pm x\sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}.$$

On aura l'équation de l'enveloppe, en éliminant β entre cette équation et sa dérivée par rapport à β,

$$2(x - 3a)\beta + 3ay = \frac{\pm x(a^2\beta + 2\beta^3)}{\sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}},$$

ce qui conduit à l'équation

$$(3y^2 - x^2 + 2ax)^3(3a - 2x)^2 \\ = y^2(3xy^2 - x^3 - 3ay^2 + 5ax^2 - 6a^2x)^2.$$

La courbe est du huitième degré, symétrique par rapport à l'axe Cx. L'origine est un point quadruple. Mais il faut remarquer que l'équation représente non seulement l'enveloppe demandée, mais aussi celle de la ligne qui correspond à la valeur de m qui donnerait pour la surface un minimum algébrique.

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 1343

(voir 2e série, t. XVIII, p. 144).

PAR M. MORET-BLANC.

On donne un triangle ABC *et un point* P. *Soient respectivement* α, β, γ *les points où les côtés du triangle rencontrent les droites* PA, PB *et* PC. *On suppose que les droites menées par les points* α, β *et* γ *perpendiculairement aux côtés* BC, CA *et* AB *se coupent en un même point* M. *Déterminer : 1° le lieu décrit par le point* P ; *2° le lieu décrit par le point* M.

(LAGUERRE.)

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, et soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations des côtés BC, CA, AB; celles des droites PC, PB, PA, qui passent par un même point, seront de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} a\alpha - b\beta = 0, \\ b\beta - c\gamma = 0, \\ c\gamma - a\alpha = 0. \end{cases}$$

L'équation de la perpendiculaire à AB, au point où AB est rencontré par PC, est de la forme

$$a\alpha - b\beta + n\gamma = 0.$$

La condition pour qu'elle soit perpendiculaire à AB ($\gamma = 0$) est

$$n + b\cos A - a\cos B = 0,$$

d'où

$$n = a\cos B - b\cos B,$$

et l'équation de cette perpendiculaire devient

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a\alpha - b\beta + (a\cos B - b\cos A)\gamma = 0, \\ \text{de même} \\ b\beta - c\gamma + (b\cos C - c\cos B)\alpha = 0, \\ c\gamma - a\alpha + (c\cos A - a\cos C)\beta = 0 \end{array}\right.$$

sont les équations des deux autres perpendiculaires.

La condition pour que ces trois droites concourent en un même point est

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a & -b & a\cos B - b\cos A \\ b\cos C - c\cos B & b & -c \\ -a & c\cos A - a\cos C & c \end{vmatrix} = 0.$$

On aura l'équation du lieu du point P en éliminant a, b, c entre cette équation et les équations (1). Celles-ci peuvent s'écrire

$$\frac{a}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{b}{\frac{1}{\beta}} = \frac{c}{\frac{1}{\gamma}}.$$

Remplaçant, dans le déterminant (3), a, b, c par les quantités proportionnelles

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma},$$

et chassant les dénominateurs, il vient

$$\begin{vmatrix} \beta & -\alpha & \beta\cos B - \alpha\cos A \\ \gamma\cos C - \beta\cos B & \gamma & -\beta \\ -\gamma & \alpha\cos A - \gamma\cos C & \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et réduisant,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha^2 \sin^2 A(\beta \cos B - \gamma \cos C) \\ \quad + \beta^2 \sin^2 B(\gamma \cos C - \alpha \cos A) + \gamma^2 \sin^2 C(\alpha \cos A - \beta \cos B) = 0. \end{array}\right.$$

Cette équation représente une cubique passant par les trois sommets et par le point de concours des hauteurs du triangle ABC, comme on pouvait le prévoir.

On obtiendra l'équation du lieu du point M en éliminant a, b, c entre les trois équations (2).

Ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a(\alpha + \gamma \cos B) &= b(\beta + \gamma \cos A), \\ b(\beta + \alpha \cos C) &= c(\gamma + \alpha \cos B), \\ c(\gamma + \beta \cos A) &= a(\alpha + \beta \cos C). \end{aligned}$$

Multipliant ces équations membre à membre, supprimant le facteur abc commun aux deux membres et réduisant, il vient

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha^2(\beta \cos B - \gamma \cos C) \\ \quad + \beta^2(\gamma \cos C - \alpha \cos A) + \gamma^2(\alpha \cos A - \beta \cos B) = 0. \end{array}\right.$$

Le lieu est encore une cubique passant par les trois sommets du triangle et par le point de concours des hauteurs.

On reconnaît *a priori*, et l'on vérifie sur l'équation, que le lieu du point M passe encore par les centres des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits au triangle ABC; les points correspondants du lieu du point P sont le centre de gravité du triangle et les points de concours des trois droites qui joignent chaque sommet au point de contact sur le côté opposé du cercle inscrit, et de chacun des cercles ex-inscrits.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart et Pisani.

Question 1373

(voir 2ᵉ série, t. XX, p. 383);

PAR M. N. GOFFART.

Si, d'un point O *d'une circonférence, on abaisse des perpendiculaires* OM, ON *à deux côtés d'un triangle inscrit, la projection du troisième côté sur* MN *sera égale à* MN. (ERNEST CESARO.)

Soient ABC le triangle inscrit, et OM, ON les perpendiculaires abaissées d'un point O de la circonférence sur les côtés AB, AC respectivement (1).

Dans le triangle OMN, on a

$$\frac{MN}{\sin MON} = \frac{OM}{\sin ONM},$$

ou, parce que $MON = A$, et $ONM = OAM$,

$$\frac{MN}{\sin A} = \frac{OM}{\sin OAM}.$$

Le triangle OMA étant rectangle en M,

$$\frac{OM}{\sin OAM} = AO:$$

donc

$$\frac{MN}{\sin A} = AO, \quad \text{d'où} \quad MN = AO \sin A.$$

L'angle aigu formé par BC et MN est égal à

$$B - AMN = B - AON = B - 90^\circ + A + OAM = 90^\circ - OBA \text{ (2)}:$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure. Les droites BC, MN se rencontrent en un point P qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur BC.

(2) Le quadrilatère OMBP étant inscriptible, l'angle

$$MPB = MOB = 90^\circ - OBA.$$

il s'ensuit que la projection de BC sur MN est égale à BC sin OBA. Mais le triangle AOB donne

$$\frac{AO}{\sin OBA} = \frac{AB}{\sin AOB} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A},$$

donc

$$BC \sin OBA = AO \sin A,$$

et par conséquent la projection de BC sur MN est égale à MN.

Note. — La même question a été résolue par MM. Leblond et Vielle, élèves au lycée du Havre, et par M. Fauquembergue, qui a aussi résolu la question 1345.

Question 1374

(voir 2e série, t. XX, p. 384);

PAR M. N. GOFFART.

On donne le plan et les trois angles d'un triangle ABC, *dont le sommet* A *est fixe; trouver le lieu géométrique des points de l'espace d'où les trois côtés sont vus sous des angles droits.*

On suppose que les trois angles donnés sont aigus.

Considérons l'une des positions ABC du triangle, et soient AA', BB', CC' ses trois hauteurs qui se rencontrent au point O. Conservons les notations habituelles, et désignons par α, β, γ les longueurs OA, OB, OC.

Par les sommets A, B, C, menons respectivement aux côtés opposés les parallèles B''AC'', A''BC'', B''CA'' : on obtient un triangle A''B''C'' semblable à ABC, dans le rapport de similitude 2. Si donc $d = 2r$ est le diamètre du cercle circonscrit à ABC, $2d$ est le diamètre du cercle circonscrit à $A''B''C''$. Or, dans le triangle OAB'', rectangle en A, on a

$$OA = OB'' \cos B''OA,$$

ou

$$(1) \qquad \alpha = d \cos A.$$

On a deux autres relations analogues, en sorte que

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{\cos A} = \frac{\beta}{\cos B} = \frac{\gamma}{\cos C} = d,$$

relation de même forme que

$$(3) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d,$$

et d'où l'on tire par multiplication

$$(4) \qquad \frac{a\alpha}{\sin 2A} = \frac{b\beta}{\sin 2B} = \frac{c\gamma}{\sin 2C} = 2r^2,$$

puis par division

$$(5) \qquad \frac{\alpha}{a} \operatorname{tang} A = \frac{\beta}{b} \operatorname{tang} B = \frac{\gamma}{c} \operatorname{tang} C = 1.$$

Décrivons sur les trois côtés du triangle comme diamètre trois sphères, qui seront chacune le lieu d'où l'on voit le côté correspondant sous l'angle droit. Elles se coupent en deux points symétriques par rapport au plan ABC et qui se projettent en O. Soit M l'un de ces points. Deux des sphères se coupent suivant une circonférence dans le plan AMA', dont le diamètre est AA'. Donc

$$OM^2 = OA . OA' = \alpha(h - \alpha) = d \cos A \left(\frac{bc}{d} - d \cos A \right),$$

ou

$$\begin{aligned} OM^2 &= d^2 \cos A (\sin B \sin C - \cos A) \\ &= d^2 \cos A [\sin B \sin C + \cos(B + C)], \end{aligned}$$

ou enfin

$$OM^2 = d^2 \cos A \cos B \cos C \text{ (}^1\text{)}.$$

Donc, lorsque le triangle tourne autour du point A dans le plan ABC donné, et se déforme en restant semblable à lui-même, le rapport

$$\left(\frac{OM}{OA}\right)^2 = \frac{\cos B \cos C}{\cos A}$$

reste constant.

Le lieu des points M est donc un cône de révolution autour de la perpendiculaire en A au plan ABC, et la tangente du demi-angle au sommet est

$$\sqrt{\frac{\cos A}{\cos B \cos C}}.$$

Il résulte de là que le cône n'existe que si chacun des cosinus est positif, c'est-à-dire que si les trois angles donnés sont aigus.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc