S. RÉALIS

Exercices de calcul algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 501-506
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__501_0>

EXERCICES DE CALCUL ALGÉBRIQUE;

PAR M. S. REALIS.

1. QUESTION. — *Désignant par* P *la somme de deux carrés premiers entre eux, et par n un entier positif quelconque, démontrer, par un calcul direct, que le nombre* $9P^n$ *est la somme de trois carrés, premiers entre eux par rapport à* P.

SOLUTION. — Soit $P = p^2 + q^2$. On a, pour les premières valeurs de n,

$$9P = (2p + q)^2 + 4(p - q)^2 + (p + 2q)^2,$$

$$9P^2 = 4(p^2 + pq - q^2)^2 + 4(p^2 - 2pq - q^2)^2 + (p^2 + 4pq - q^2)^2,$$

$$\begin{aligned}9P^3 = {} & (2p^3 + 3p^2q - 6pq^2 - q^3)^2 + 4(p^3 - 3p^2q - 3pq^2 + q^3)^2 \\ & + (p^3 + 6p^2q - 3pq^2 - 2q^3)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9P^4 = {} & 4(p^4 + 2p^3q - 6p^2q^2 - 2pq^3 + q^4)^2 \\ & + 4(p^4 - 4p^3q - 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4)^2 \\ & + (p^4 + 8p^3q - 6p^2q^2 - 8pq^3 - q^4)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9P^5 = {} & (2p^5 + 5p^4q - 20p^3q^2 - 10p^2q^3 + 10pq^4 + q^5)^2 \\ & + 4(p^5 - 5p^4q - 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 - q^5)^2 \\ & + (p^5 + 10p^4q - 10p^3q^2 - 20p^2q^3 + 5pq^4 + 2q^5)^2,\end{aligned}$$

. . . .

La formule générale, constituant la solution de la question proposée, est comme il suit.

Soient $n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ les coefficients binomiaux, en sorte que

$$(1 + 1)^n = 1 + n + n_1 + n_2 + \ldots + n_1 + n + 1,$$

et soit fait, pour abréger,

$$Q = 2p^n + np^{n-1}q - 2n_1p^{n-2}q^2 - n_2p^{n-3}q^3 + 2n_3p^{n-4}q^4 + \ldots,$$

$$R = p^n - np^{n-1}q - n_1p^{n-2}q^2 + n_2p^{n-3}q^3 + n_3p^{n-4}q^4 + \ldots,$$

$$S = p^n + 2np^{n-1}q - n_1p^{n-2}q^2 - 2n_2p^{n-3}q^3 + n_3p^{n-4}q^4 + \ldots;$$

on aura, pour toute valeur entière et positive de n,

$$9\,P^n = Q^2 + 4\,R^2 + S^2.$$

Note. — Pour éviter tout malentendu dans l'application de la formule générale, nous ajouterons les observations suivantes :

1° Dans les polynômes Q et S, les signes des deux premiers termes sont positifs, ceux des deux termes suivants sont négatifs, ceux du cinquième et du sixième termes sont positifs, et ainsi de suite, en alternant de deux en deux termes. Dans le polynôme R, le signe du premier terme est positif, ceux des deux termes suivants sont négatifs, ceux du quatrième et du cinquième terme redeviennent positifs, et ainsi de suite.

2° Dans le polynôme Q, les coefficients n_{2m+1}, d'indice impair, sont multipliés par 2 ; de même, dans le polynôme S, pour les coefficients n_{2m}, d'indice pair. Dans l'expression de R, les coefficients n, n_1, n_2, ... se suivent tels qu'ils se présentent dans le développement du binôme, au signe près.

La vérification de la formule en question est un utile exercice que nous proposons aux jeunes élèves. On peut y procéder de deux manières, savoir : en constatant directement qu'il y a identité entre les deux membres développés, ou bien en faisant voir que, si la relation subsiste pour une valeur donnée de n, elle subsiste encore pour les valeurs $n+1$, $n+2$, ...

2. Changeons, dans les identités ci-dessus, q en $q\sqrt{-1}$; il nous viendra

$$9\,(p^2 - q^2) = (2p + q\sqrt{-1})^2 + 4\,(p - q\sqrt{-1})^2 + (p + 2q\sqrt{-1})^2,$$

et

$$9\,(p^2 - q^2)^n = (p' + q'\sqrt{-1})^2 + 4\,(p'' - q''\sqrt{-1})^2 + (p'' + q'''\sqrt{-1})^2$$

p', q', p'', q'', p''', q''' étant déterminés directement en fonction de p et q.

Moyennant des valeurs convenables de p et q, l'expression $p^2 - q^2$ peut représenter tout nombre impair donné; on a donc ce théorème que : *la puissance $n^{ième}$ d'un nombre impair quelconque, étant multipliée par* 9, *est la somme des carrés de trois nombres entiers complexes, que l'on peut déterminer directement.*

En particulier

$$\begin{aligned} 9(2p-1) &= \left[2p+(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 + 4\left[p-(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 \\ &\quad + \left[p+2(p-1)\sqrt{-1}\right]^2, \\ 9(2p-1)^2 &= 4\left[(2p^2-2p+1)+p(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 \\ &\quad + 4\left[(2p^2-2p+1)-2p(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 \\ &\quad + \left[(2p^2-2p+1)+4p(p-1)\sqrt{-1}\right]^2. \end{aligned}$$

L'identité

$$\begin{aligned} x &= \left[\frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{2.3}\sqrt{-1}\right]^2 + \left[\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{3}\sqrt{-1}\right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{x+1}{2.3} + \frac{x-1}{3}\sqrt{-1}\right]^2, \end{aligned}$$

en y désignant par x un nombre entier quelconque, exprime une proportion plus générale, à savoir que : *tout nombre entier est, par une décomposition directe, la somme des carrés de trois nombres rationnels complexes.*

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} xz &= \left[\frac{x+z}{3} + \frac{x-z}{2.3}\sqrt{-1}\right]^2 + \left[\frac{x+z}{3} - \frac{x-z}{3}\sqrt{-1}\right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{x+z}{2.3} + \frac{x-z}{3}\sqrt{-1}\right]^2. \end{aligned}$$

Nous n'avons pas besoin de rappeler que l'on entend par *nombre rationnel complexe* l'expression $a + b\sqrt{-1}$, dans laquelle a et b sont des quantités rationnelles. Si a et b ont des valeurs entières, la même expression prend le nom de *nombre entier complexe*.

3. Des relations inscrites au n° 1, on passe facilement aux suivantes :

$$18\,P = (3p - q)^2 + (4q)^2 + (3p + q)^2,$$
$$18\,P^2 = (3p^2 - 2pq - 3q^2)^2 + (8pq)^2 + (3p^2 - 2pq - 3q^2)^2,$$
$$18\,P^3 = (3p^3 - 3p^2q - 9pq^2 + q^3)^2 + [4q(3p^2 - q^2)]^2 + (3p^3 + 3p^2q - 9pq^2 - q^3)^2,$$
$$18\,P^4 = (3p^4 - 4p^3q - 18p^2q^2 + 4pq^3 + 3q^4)^2 + [16pq(p^2 - q^2)]^2 + (3p^4 + 4p^3q - 18p^2q^2 - 4pq^3 - 3q^4)^2,$$
$$18\,P^5 = (3p^5 - 5p^4q - 30p^3q^2 + 10p^2q^3 + 15pq^4 - q^5)^2 + [4q(5p^4 - 10p^2q^2 + q^4)]^2 + (3p^5 + 5p^4q - 30p^3q^2 - 10p^2q^3 + 15pq^4 + q^5)^2,$$

. . . .

dont nous laissons au lecteur le soin de formuler la loi. Elles renferment, comme on voit, la solution d'une question analogue à la précédente.

On obtient ici, en particulier, l'identité assez remarquable

$$2(6p-1) = [p - (3p-1)\sqrt{-1}]^2 + (4p)^2 + [p + (3p-1)\sqrt{-1}]^2,$$

comprise, du reste, dans la formule

$$2q(6p-q) = [p - (3p-q)\sqrt{-1}]^2 + (4p)^2 + [p + (3p-q)\sqrt{-1}]^2.$$

4. On a, par identité,

$$2\,P^n = R^2 + T^2,$$

P et R étant les mêmes quantités que ci-dessus (n° 1), et T se déduisant de R, par le changement de q en $-q$.

Écrivant

$$9\,P^n = 4\,R^2 + 4\,T^2 + P^n,$$

il en résulte, dans le cas où n est un nombre pair, une nouvelle solution de la question considérée au n° 1.

Il se présente ici l'égalité évidente

$$2(2p-1) = \left[p-(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 + \left[p+(p-1)\sqrt{-1}\right]^2,$$

par où le double de tout nombre impair est représenté par la somme des carrés de deux entiers complexes conjugués; et l'on a, de même,

$$2.3(2p-1) = \left[(p+1)-(p-2)\sqrt{-1}\right]^2 + \left[(p+1)+(p-2)\sqrt{-1}\right]^2,$$
$$2.5(2p-1) = \left[(p+2)-(p-3)\sqrt{-1}\right]^2 + \left[(p+2)+(p-3)\sqrt{-1}\right]^2,$$
$$2.7(2p-1) = \left[(p+3)-(p-4)\sqrt{-1}\right]^2 + \left[(p+3)+(p-4)\sqrt{-1}\right]^2,$$
....
$$\begin{aligned}2(2h-1)(2p-1) = {} & \left[(p+h-1)-(p-h)\sqrt{-1}\right]^2 \\ & + \left[(p+h-1)+(p-h)\sqrt{-1}\right]^2,\end{aligned}$$

ou, sous forme plus simple,

$$8xy = \left[(x+y)-(x-y)\sqrt{-1}\right]^2 + \left[(x+y)+(x-y)\sqrt{-1}\right]^2.$$

5. Les résultats qui précèdent peuvent être généralisés à différents points de vue, ce qui fournira de nouveaux sujets d'exercices pour les élèves.

Nous nous bornons ici à remarquer que les formules relatées, étant de simples identités algébriques, sont indépendantes de toute hypothèse préalable à l'égard des quantités p et q. Les formules générales, où n reste indéterminé, sont même indépendantes de la condition que n soit un entier positif, puisque les relations établies entre les coefficients binomiaux n, n_1, n_2, n_3, ... ressortent des opérations à faire pour la vérification des mêmes formules, et ne sont pas une conséquence de l'hypothèse que n soit entier et positif. Il suffit donc, pour que l'égalité subsiste entre les deux membres de chaque formule générale, que les développements en série soient convergents. Or, lorsque n n'est pas un entier positif, les séries illimitées Q, R, S, T sont visiblement convergentes, toutes les fois que le développement de P^n est lui-même convergent.

Considérons, par exemple, la formule générale du n° 4, relative à la décomposition de $2P^n$ en deux carrés, et écrivons

$$
\begin{aligned}
P^n &= p^{2n}\left(1 + n\frac{q^2}{p^2} + n_1\frac{q^4}{p^4} + n_2\frac{q^6}{p^6} + \ldots\right) = p^{2n}P',\\
R &= p^n\left(1 - n\frac{q}{p} - n_1\frac{q^2}{p^2} + n_2\frac{q^3}{p^3} + \ldots\right) = p^n R',\\
T &= p^n\left(1 + n\frac{q}{p} - n_1\frac{q^2}{p^2} - n_2\frac{q^3}{q_3} + \ldots\right) = p^n T',
\end{aligned}
$$

où l'on suppose $p^2 > q^2$. La relation

$$2P' = R'^2 + T'^2$$

aura lieu identiquement entre les quantités p et q, quelle que soit la valeur réelle de n; il en sera donc de même à l'égard de la relation

$$2P^n = R^2 + T^2,$$

que nous avons rapportée ci-dessus, en y considérant n comme entier et positif.