Weill

Théorèmes sur les courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 498-500

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__498_1>

THÉORÈMES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. WEILL.

Considérons une courbe algébrique représentée par l'équation

$$\varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_0 = 0.$$

Cherchons les abscisses des points où elle est rencontrée par une droite

$$y = ax + b;$$

l'équation qui donne ces abscisses sera

$$\begin{aligned} 0 = x^m \varphi_m(1,a) &+ x^{m-1}(b\varphi'_m + \varphi_{m-1}) \\ &+ x^{m-2}\left(\frac{b^2}{2}\varphi''_m + b\varphi'_{m-1} + \varphi_{m-2}\right) + \ldots. \end{aligned}$$

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de cette équation; la somme des carrés des différences de ces racines prises deux à deux est

$$(m-1)(x_1+x_2+\ldots+x_m)^2 \\ -2m(x_1x_2+x_1x_3+\ldots)=k^2.$$

La somme des carrés des distances mutuelles des points de rencontre de la sécante avec la courbe est égale à $k^2(1+a^2)$, c'est-à-dire à

$$(1+a^2)\left[\frac{(m-1)(b\varphi'_m+\varphi_{m-1})^2}{(\varphi_m)^2}-2m\frac{\frac{b^2}{2}\varphi''_m+b\varphi'_{m-1}+\varphi_{m-2}}{\varphi_m}\right].$$

Nous allons tirer quelques conséquences de cette formule. Elle montre d'abord que si l'on coupe par une droite une série de courbes dans lesquelles les termes de degré le plus élevé m, ainsi que les termes de degré $(m-1)$ et $(m-2)$ sont les mêmes, la somme des carrés des distances mutuelles des points où la sécante rencontre chacune des courbes est la même. Cherchons les courbes pour lesquelles la somme des carrés des distances mutuelles des points de rencontre avec une série de sécantes parallèles reste la même; il faudra, dans la formule, annuler le coefficient de b^2 et celui de b. On a alors les relations

$$(m-1)(\varphi'_m)^2-m\,\varphi_m\varphi''_m=0,$$
$$(m-1)\varphi'_m\varphi_{m-1}-m\,\varphi_m\varphi'_{m-1}=0.$$

On en déduit

$$\varphi_m=(kx+ly)^m,$$
$$\varphi_{m-1}=c(kx+ly)^{m-1}.$$

Par une transformation de coordonnées, on peut ramener l'équation de la courbe à la forme

$$y^m+\varphi_{m-2}(x,y)+\ldots=0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque l'équation d'une courbe peut se ramener à la forme*

$$y^m + \varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0,$$

la somme des carrés des distances mutuelles des points où une sécante rencontre cette courbe reste constante quand la sécante se déplace parallèlement à elle-même. Les courbes dont l'équation réduite est de la forme indiquée sont les seules qui jouissent de cette propriété géométrique.

Remarque. — On peut observer que, pour les courbes dont il s'agit, le centre des moyennes distances des points où une sécante quelconque rencontre la courbe est sur une droite fixe.

Si l'on cherche les conditions pour que la somme des carrés des distances des points où une sécante rencontre une courbe soit nulle, on trouve, d'après la formule établie plus haut, qu'il faut que l'on ait pour forme réduite de l'équation de la courbe

$$y^m + \varphi_{m-3}(x, y) + \ldots = 0,$$

et l'on a le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une courbe dont l'équation réduite est*

$$y^m + \varphi_{m-3}(x, y) + \ldots = 0,$$

la somme des carrés des distances mutuelles des points où une sécante quelconque rencontre la courbe est toujours nulle, et c'est la seule courbe jouissant de cette propriété.