NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 473-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__473_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 251

(voir 1re série, t. XI, p. 114),

PAR M. J. BOURGET.
Docteur ès Sciences.

Placer les huit premiers nombres sur une même ligne, de telle sorte que la différence de deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à la différence *de leurs rangs dans la ligne. Combien existe-t-il de dispositions de ce genre?*

17582463

est une de ces dispositions.

Placer sur un échiquier huit reines, de manière qu'aucune d'elles ne soit en prise à l'une des sept autres?

La solution est une conséquence de la précédente.

(E. Lionnet.)

Ce problème est évidemment difficile : il s'agit de choisir, parmi les 40320 permutations des huit chiffres (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) celles qui satisfont à la condition imposée par l'énoncé.

A la page 148 du tome XI, 1^re^ série des *Nouvelles Annales,* Terquem dit, dans une Note, que Koralek, par un procédé empirique, a trouvé que le problème de Lionnet a 92 solutions, dont 12 seulement sont distinctes, mais il ne nous fait pas connaître ces solutions, ni le procédé employé par Koralek pour arriver à ces conclusions.

En m'occupant du problème des permutations, j'ai été naturellement amené à réfléchir au problème de Lionnet. Après l'avoir transformé en un problème d'Analyse indéterminée, j'ai pu trouver un procédé graphique conduisant sûrement à toutes les solutions du problème. Ce procédé graphique peut être comparé au crible d'Ératosthènes, pour la détermination des nombres premiers ; c'est peut-être le procédé empirique de Koralek. Quoi qu'il en soit, il me semble qu'il constitue une solution rationnelle du problème proposé, en ce sens qu'il réduit la considération de 40320 permutations à la construction d'environ 300 petits Tableaux faciles à faire.

En suivant ce procédé, que je ferai connaître tout à l'heure, j'ai trouvé, comme Koralek, 92 permutations satisfaisant à la condition imposée.

Au point de vue du problème des échecs, ces 92 solutions ne donnent que 24 figures distinctes. On comprend, en effet, que plusieurs permutations correspondent à la même disposition des dames sur un échiquier, en prenant successivement comme base de l'échiquier ses quatre côtés. Ces 24 figures peuvent même être regardées comme se réduisant à 12, en remarquant qu'elles se divisent en groupes de deux symétriques relativement à la base supérieure et à la base inférieure de l'échiquier.

Nous nous expliquons ainsi le résultat annoncé par Koralek.

Voici comment nous avons procédé :

Imaginons un échiquier de 64 cases. Le long de la première ligne verticale nous ferons mouvoir le chiffre 1, le long de la seconde ligne le chiffre 2, ainsi de suite. Il

8			3					
7						6		
6				4				
5		2						
4								8
3					5			
2							7	
1	1							
	1	2	3	4	5	6	7	8

ne devra jamais y avoir plus d'un chiffre sur une même ligne horizontale, et si nous dispersons ainsi les huit chiffres en remplissant les deux conditions que nous venons d'énoncer, nous aurons chaque fois une permutation des huit chiffres, pour laquelle le rang occupé par chaque chiffre sera le numéro de la ligne horizontale sur laquelle il se trouve. Dans la figure ci-contre nous trouvons la permutation

17582463

Les valeurs des chiffres sont les *abscisses* de chaque case du Tableau, les rangs de ces chiffres dans la permutation sont les *ordonnées*.

Ce système de représentation adopté, on voit qu'après avoir placé un chiffre dans une case de sa colonne, il ne peut pas y avoir de chiffres dans une case de la diagonale qui correspond au chiffre placé, quand on s'assujettit à la condition imposée par M. Lionnet; car, suivant cette diagonale, les ordonnées augmentent ou diminuent de la même quantité que les abscisses.

De là un procédé empirique bien simple pour trouver toutes les permutations demandées :

1° On fait une série d'échiquiers semblables à celui de la figure ci-dessus, ce qui est facile au moyen de papier quadrillé;

2° On placera 1 à la première case du bas, puis on pointe les cases horizontales et les cases diagonales correspondantes où l'on ne peut plus placer de chiffres;

3° Il reste au chiffre 2 une série de cases possibles; on le met à la première, et l'on pointe toutes les cases horizontales et diagonales correspondantes à droite;

4° Il reste au chiffre 3 une série de cases possibles; on le place à la première, et l'on pointe comme précédemment les cases horizontales et diagonales correspondantes;

5° On continue ainsi à éliminer les diverses cases de l'échiquier qui ne peuvent pas recevoir de chiffres au fur et à mesure qu'on a placé les précédents. On arrive de la sorte méthodiquement à trouver les seules permutations satisfaisant à la condition du problème.

Remarquons que si, au lieu de lire une permutation de bas en haut, nous la lisons de haut en bas

36428571

nous avons évidemment une nouvelle permutation satisfaisant à la condition Lionnet; donc, quand nous aurons placé 1 aux rangs 1, 2, 3, 4, nous pourrons nous arrêter. Les autres permutations seront celles que nous aurons déjà trouvées, lues en sens inverse. Le travail ainsi réduit exige environ 300 opérations. C'est peu, si l'on remarque que le nombre total des permutations parmi lesquelles on a choisi est 40320.

Voici le tableau des 46 permutations que nous avons trouvées :

17582463	26174835	25713864
17468253	53172864	28613574
16837425	83162574	62713584
15863724	46152837	72418536
	57142863	82417536
61528374	63184275	52814736
41582736	53168247	62714853
51842736	63185247	52617483
31758246	48136275	35714286
51468273	84136275	64718253
71386425	48157263	58417263
51863724	47185263	36815724
41586372	64158273	75316824
	63175824	64713528
	73168524	58413627
	57138642	36418572
		36814752
		57413862

En lisant chacun de ces résultats en sens inverse, nous en obtenons 46 autres satisfaisant encore à la condition imposée: donc nous avons en tout, comme le dit Koralek, 92 permutations différentes jouissant de la propriété indiquée dans l'énoncé.

Mais, au point de vue des échecs, ces permutations ne constituent pas toutes des solutions différentes. En effet, on peut prendre pour base de l'échiquier un côté quelconque, et si l'on considère une des solutions précédentes, par exemple celle qui est indiquée par Lionnet; elle donne, en prenant successivement chaque côté pour base, les solutions

84136275, 63571428, 42736851.

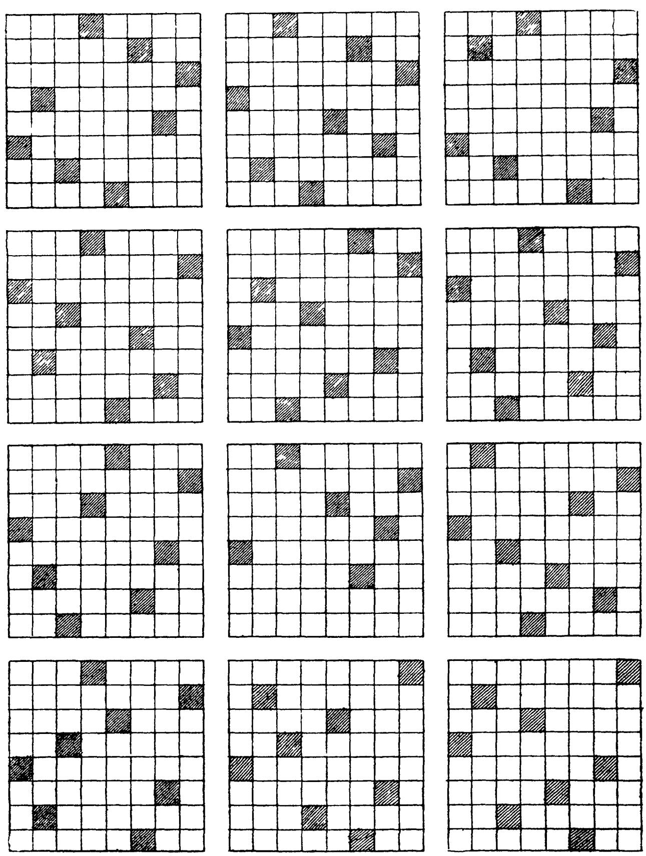
Donc on peut classer les solutions du Tableau précédent et leurs inverses en groupes donnant sur l'échiquier la même figure.

Voici le Tableau de cette classification qui renferme 24 groupes :

(1).....	17582463	84136275	63571428	42736851
(2)....	17468253	83162574	64713528	52473861
(3)....	51468273	73168524	62713584	57413862
(4)....	71386425	41586372	72631483	47531682
(5)....	61528374	57138642	52617483	75316824
(6)....	41582736	36271485	46831752	74286135
(7)....	51842736	36814752	36275184	74258136
(8)...	31758246	35714286	53847162	73825164
(9)....	51863724	36418572	72418536	57263184
(10)...	57142863	64158273	63175824	62714853
(11)...	63184275	47185263	42751863	63741825
(12)...	53172864	64718253		
(13)...	15863724	82417536	57263148	36428571
(14)...	16837425	82531746	47526138	35286471
(15)...	26831475	48531726	42586137	37286415
(16)...	28613574	58413627	27368514	52468317
(17)...	42861357	38471625	24683175	47382516
(18)...	53168247	25713864	58417263	63728514
(19)...	63185247	48157263	25741863	63724815
(20)...	26174835	46152837	68241753	64285713
(21)...	48136275	27581463	63581427	42736815
(22)...	35841726	42857136	37285146	36824175
(23)...	52814736	57248136	36258174	36815724
(24)...	35281746	46827135		

Ces 24 groupes se divisent en deux groupes de 12 termes chacun, jouissant de cette propriété que la figure correspondante à l'un des groupes de la première série de 12 est symétrique de la figure correspondante au groupe de même rang dans la seconde série. En d'autres termes, si l'on trace la figure formée par un des groupes de la première série de 12 sur une feuille de papier, en retournant la feuille et regardant la figure par transparence, on obtient la figure donnée par le groupe de même rang dans la seconde série de 12.

Donc, au point de vue du problème des échecs, on peut dire, avec Koralek, qu'il n'y a que 12 solutions distinctes donnant les figures du Tableau suivant :



Ces figures correspondent à chacun des 12 premiers groupes.

Si l'on pouvait les trouver directement par une méthode simple, on pourrait en déduire les 92 permutations des huit premiers chiffres remplissant les conditions imposées par l'énoncé de Lionnet.