Nouvelles annales de mathématiques

A. Chambeau

Concours d'admission à l'École centrale en 1880 (deuxième session)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 464-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__464_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1880 (DEUXIÈME SESSION);

PAR M. A. CHAMBEAU,
Élève du pensionnat Notre-Dame du Sacré-Cœur.

1° *Écrire l'équation générale des paraboles passant par deux points donnés,* A *et* B, *et dont les diamètres ont une direction donnée.*

2° *Donner l'expression des coordonnées du sommet et du foyer de ces paraboles.*

3° *On mène à chaque parabole une tangente perpendiculaire à la droite* AB, *trouver le lieu des points de contact et construire ce lieu.*

Notations. — AB *étant prise pour axe des* y, *et une perpendiculaire pour axe des* x, *on fera* $AB = 2a$, *en appelant m le coefficient angulaire de la direction des diamètres des paraboles considérées.*

Je prends le milieu de AB pour origine.

L'équation générale des paraboles ayant m pour coefficient angulaire de la direction de leurs diamètres est

$$(y - mx)^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0.$$

L'équation

$$y - mx = 0$$

représente le diamètre mené par l'origine, et

$$2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0$$

est l'équation de la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Ces paraboles devant passer par les points A et B, dont les coordonnées sont $(0, a)$ et $(0, -a)$, on a les équations de condition

$$a^2 + 2\mu a + \nu = 0, \quad a^2 - 2\mu a + \nu = 0,$$

d'où

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \nu = -a^2;$$

donc : 1° l'équation générale demandée est

$$(1) \qquad (y - mx)^2 + 2\lambda x - a^2 = 0;$$

2° l'équation (1) peut s'écrire identiquement

$$(y - mx + h)^2 - 2h(y - mx) + 2\lambda x - a^2 - h^2 = 0,$$

ou

$$(y - mx + h)^2 + 2(\lambda + mh)x - 2hy - a^2 - h^2 = 0.$$

L'équation

$$y - mx + h = 0$$

représente un diamètre quelconque, et

$$2(\lambda + mh)x - 2hy - a^2 - h^2 - 0,$$

la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

En exprimant que ces droites sont perpendiculaires, on aura les équations de l'axe et de la tangente au sommet.

La condition est

$$m\left(\frac{\lambda + mh}{h}\right) + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{m\lambda}{m^2 + 1}.$$

Il s'ensuit que l'équation de l'axe est

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2 + 1} = 0,$$

et celle de la tangente au sommet

$$x + my - \frac{a^2(m^2 + 1)^2 + m^2\lambda^2}{2(m^2 + 1)\lambda} = 0.$$

De ces deux équations, on tire

$$x = \frac{a^2(m^2 + 1)^2 - m^2\lambda^2}{2\lambda(m^2 + 1)^2}$$

et

$$y = \frac{m(m^2 + 2)\lambda^2 + m(m^2 + 1)^2 a^2}{2\lambda(m^2 + 1)^2}.$$

Ces valeurs de x et y sont les coordonnées du sommet des paraboles.

Le foyer sera déterminé par l'intersection de l'axe et de la droite représentée par l'équation

$$x + my - \frac{a^2(m^2 + 1)^2 + (m^2 - 1)\lambda^2}{2\lambda(m^2 + 1)} = 0.$$

(*Voir* les *Nouvelles déterminations analytiques des foyers et directrices*, par M. Georges Dostor) [1].

La résolution des équations

$$x + my - \frac{a^2(m^2+1)^2 + (m^2-1)\lambda^2}{2\lambda(m^2+1)} = 0,$$

---

[1] Il est facile de trouver les coordonnées du foyer sans avoir recours aux formules générales des *Nouvelles déterminations analytiques*, etc., car l'ordonnée du foyer est égale à celle du point de concours des deux tangentes représentées par les équations

$$2\lambda x - a^2 = 0 \quad \text{et} \quad x + my - \frac{a^2(m^2+1)^2 + m^2\lambda^2}{2(m^2+1)\lambda} = 0,$$

et l'abscisse s'obtient au moyen de l'équation

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2-1} = 0$$

de l'axe, en remplaçant y par la valeur de l'ordonnée. Cela résulte simplement de ce que le lieu des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.

On peut encore, sans connaître l'équation de la tangente au sommet, déterminer le foyer par un calcul qui s'appuie sur les considérations suivantes.

Il est d'abord évident que la différence des distances des deux points A, B à la directrice est égale à la projection de AB sur la direction des diamètres; cette projection est exprimée par le produit $2a\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, indépendant de la variable λ.

La différence des distances des points A, B au foyer est, de même, égale à $2a\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$; il s'ensuit que le lieu du foyer de l'une quelconque des paraboles considérées est l'hyperbole dont A, B sont les foyers, et l'axe focal, ou traverse, $\frac{2ma}{\sqrt{m^2+1}}$. L'équation de cette hyperbole est

$$(m^2+1)y^2 - m^2(m^2+1)x^2 - m^2a^2 = 0;$$

donc, en résolvant le système des deux équations

$$(m^2+1)y^2 - m^2(m^2+1)x^2 - m^2a^2 = 0, \quad y - mx - \frac{m\lambda}{m^2-1} = 0,$$

on aura les coordonnées cherchées. (G.)

et

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2+1} = 0,$$

donne pour les coordonnées du foyer

$$x = \frac{a^2(m^2+1) - \lambda^2}{2(m^2+1)\lambda}, \quad y = \frac{a^2 m(m^2+1) + \lambda^2 m}{2(m^2+1)\lambda}.$$

3° Le coefficient angulaire des tangentes perpendiculaires à AB est nul ; on a donc au point de contact

$$-m(y - mx) + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad (y - mx)^2 + 2\lambda x - a^2 = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, il vient

$$y^2 - m^2x^2 - a^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{m^2}\right)} - \frac{y^2}{a^2} + 1 = 0,$$

équation du lieu géométrique des points de contact. Cette équation représente une hyperbole rapportée à ses axes, et ayant ses sommets réels aux points A et B. Ses asymptotes ont pour équation $y^2 - m^2x^2 = 0$; l'une d'elles est le diamètre de la parabole, mené par l'origine, l'autre est symétrique par rapport à l'axe des y ; il est donc très facile de construire cette courbe.