A. GENEIX-MARTIN

Solutions de quelques questions posées aux examens d'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 459-464

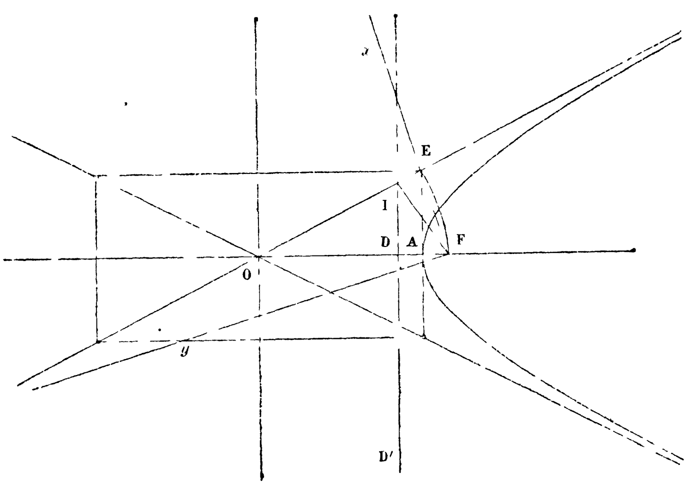
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__459_1>

SOLUTIONS DE QUELQUES QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ;

PAR M. L'ABBÉ A. GENEIX-MARTIN.

1. *Equation générale des hyperboles ayant un point donné pour foyer, et telles qu'un des sommets du rectangle construit sur les axes soit en un point donné.*

Prenons le foyer fixe F pour pôle, le point fixe E étant



le sommet du rectangle construit sur les axes, prenons FE pour axe polaire. L'équation de la courbe sera de la forme

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x \cos\omega + y \sin\omega - d)^2.$$

Il faut déterminer ε et d.

Nous savons qu'on obtient le foyer en décrivant de O comme centre un arc de rayon OE; donc le triangle EOF est isoscèle : la directrice est IDD', on sait la construire.

On a

$$\widehat{FEO} = \widehat{EFO} = \omega.$$

Soit

$$EF = l,$$

on a

$$l = 2c \cos\omega,$$

d'où

$$c = \frac{l}{2\cos\omega}.$$

On a aussi

$$IF = b = l \sin\omega; \quad OI = a = -c \cos 2\omega = -\frac{l \cos 2\omega}{2\cos\omega};$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\cos 2\omega}, \quad FD = d = \frac{b^2}{c} = 2l \sin^2\omega \cos\omega.$$

L'équation générale demandée est donc

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 2\omega} (x \cos\omega + y \sin\omega - 2l \sin^2\omega \cos\omega)^2.$$

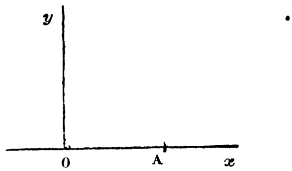
II. *Lieu des foyers des hyperboles équilatères ayant un centre fixe* O, *et passant par un point fixe* A.

Prenons OA pour axe des x, et une perpendiculaire en O à OA pour axe des y; posons $OA = a$. Soit (α, β)

un foyer. L'équation des hyperboles considérées est de la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=2(x\cos\omega+y\sin\omega-d)^2.$$

Elle renferme deux paramètres arbitraires ω et d.



L'origine étant au centre, les coefficients des termes du premier degré doivent être nuls, ce qui donne

$$(1)\qquad \alpha=2d\cos\omega,\quad \beta=2d\sin\omega,$$

d'où

$$\alpha^2+\beta^2=4d^2,\quad d=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2},\quad \cos\omega=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Exprimons que la courbe passe par le point A

$$(x=a,\quad y=0),$$

il vient, en tenant compte de la première des relations (1),

$$a^2+\alpha^2+\beta^2=2(a^2\cos^2\omega+d^2).$$

Remplaçons dans cette relation $\cos\omega$ et d par les valeurs que nous venons de trouver, il vient pour l'équation du lieu

$$(\alpha^2+\beta^2)^2-2a^2(\alpha^2-\beta^2)=0.$$

C'est l'équation d'une lemniscate qui a pour foyers le point A et son symétrique par rapport à l'origine. Le point double est O.

III. *Lieu des foyers des ellipses ayant un sommet donné à une extrémité du petit axe, et une tangente donnée à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux.*

IT, tangente fixe à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux; B, sommet fixe sur l'axe non focal. Il est facile de démontrer que la tangente IT est parallèle à la droite AB, qui joint les extrémités des axes de l'ellipse considérée parmi celles qui satisfont à la question.

On démontre aussi facilement que l'ordonnée à l'origine OT de cette tangente est égale à $OB\sqrt{2}$ ou $b\sqrt{2}$.

Soient OL la distance du centre à la droite BA, et BL′ la distance de B à la tangente IT, on a

$$\frac{OL}{BL'} = \frac{OB}{BT} = \frac{OB}{OT - OB} = \frac{b}{b(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1},$$

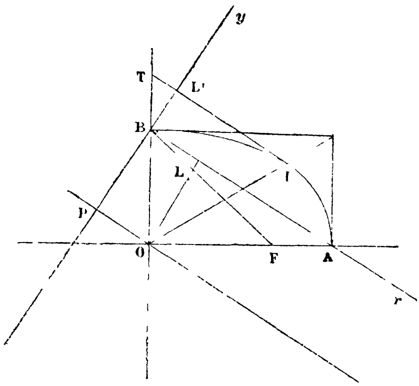
d'où

$$OL = \frac{BL'}{\sqrt{2}-1}.$$

Ainsi, étant donnés le sommet fixe B et la tangente fixe IT; δ étant la distance BL′ de B à IT, le centre de l'ellipse est sur une parallèle à IT, distante de B de la quantité $\frac{\delta}{\sqrt{2}-1}$, et par suite distante de IT de la quantité $\delta + \frac{\delta}{\sqrt{2}-1} = \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Soit F le foyer dans la position considérée de l'ellipse, on a $BF = OA$. Nous allons chercher le lieu des foyers.

Prenons BA pour axe des x, et une perpendiculaire en B pour axe des y. Prenons $BP = \delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$; par le point P



menons une parallèle à l'axe des x; elle passe par le centre O. Soit $y = \beta$ l'équation de la droite PO.

Menons de l'origine la droite BO ($y = mx$); les coordonnées du point O sont $y = \beta$, $x = \frac{\beta}{m}\cdot$ L'équation de la droite OF, perpendiculaire à OB, est

$$m^2(y-\beta) + mx - \beta = 0.$$

L'abscisse du point A où elle rencontre l'axe des x est $x = \frac{(m^2+1)\beta}{m}\cdot$ Donc

$$\overline{OA}^2 = \beta^2(1+m^2).$$

Puisque BF = OA, décrivons de l'origine comme centre le cercle de rayon $\beta\sqrt{1+m^2}$. Son équation est

(1) $$x^2 + y^2 = \beta^2(1+m^2).$$

Les foyers sont, à l'intersection de ce cercle et de la droite OA,

$$(2)\qquad m^2(y-\beta)+mx-\beta=0.$$

Nous obtiendrons le lieu cherché en éliminant m entre (1) et (2).

On sait que l'élimination de Z entre les deux équations

$$aZ^2+bZ+c=0,\quad a'Z^2+b'Z+c'=0$$

donne pour résultat

$$(ac'-ca')^2=(ab'-ba')(bc'-cb').$$

Appliquons aux équations (1) et (2) du second degré en m, il vient

$$[(\beta-y)(x^2+y^2-\beta^2)+\beta^3]^2=x\beta^2x^2(x^2+y^2-\beta^2).$$

En développant, réduisant et supprimant le facteur (x^2+y^2), on trouve pour l'équation du lieu

$$(x^2+y^2-\beta^2)y(y-2\beta)+\beta^4=0.$$

Cette courbe a deux asymptotes, l'axe des x et une parallèle à l'axe des x, dont l'équation est $y=2\beta$. Du reste, la courbe est comprise tout entière entre ces deux asymptotes, car il est facile de vérifier qu'elle ne les rencontre pas à distance finie.