

P. BARBARIN

**Solution d'une question proposée
par M. Catalan**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 453-456

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_453_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

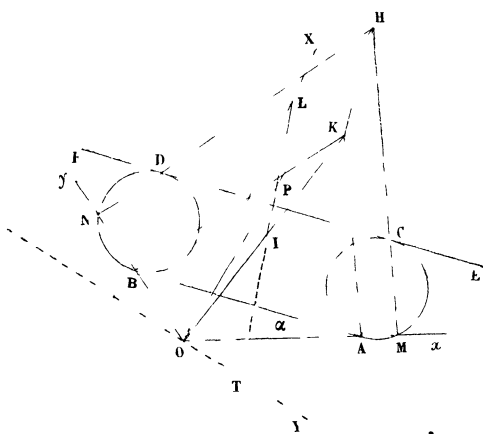
SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. CATALAN;

PAR M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Nice.

Une cycloïde reste constamment tangente à deux droites fixes Ox, Oy : trouver le lieu du centre du cercle qui passe par le point O et les deux points de contact M, N .

Soit, dans une de ses positions, EF la base de la cycloïde et soient M, N les deux points de contact. Considé-

rons les deux positions du cercle générateur qui donnent ces points M, N.



Les deux cercles ainsi tracés touchent la droite EF en C, D et coupent Ox, Oj en A, B.

La droite AB est égale et parallèle à CD.

L'angle CAx a pour mesure

$$\text{arc } \frac{MC}{2} = \frac{CE}{2}$$

dans le cercle générateur.

L'angle \widehat{DBO} a pour mesure

$$\text{arc } \frac{NBD}{2} = \frac{DE}{2}.$$

La différence de ces deux angles, c'est-à-dire le supplément de xOy , a donc pour mesure dans le cercle générateur un arc égal à $\frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$.

Donc, AB est une longueur constante et, si l'on désigne

par θ l'angle xOy , on a

$$AB = 2a(\pi - \theta),$$

a étant le rayon du cercle générateur.

Cela posé, menons MH et AK perpendiculaires à Ox , NH et BK perpendiculaires à Oy .

Tirons les droites OH , OK et prenons leurs milieux P , I .

P est le centre du cercle circonscrit au triangle OMN ; c'est le point dont nous cherchons le lieu; I est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB ; comme on sait, ce point I décrit un cercle de centre O et de rayon $R = \frac{a(\pi - \theta)}{\sin \theta}$.

Tirons HK , qui est égal et parallèle à $AC = 2a$, PI parallèle à HK et égal à sa moitié, par conséquent à a .

Si nous désignons par α l'angle variable \widehat{OAB} , nous aurons facilement

$$\widehat{KOx} = \frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha),$$

$$\widehat{PIK} = \widehat{CAM} - \widehat{KOx} = \frac{\pi}{2} - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha \right) = \theta - 2\alpha.$$

Soit OX la bissectrice de l'angle yOx ; menons la perpendiculaire OY ; la droite IP prolongée coupe OX au point L . Or,

$$\widehat{LOK} = \widehat{LOx} - \widehat{xOk}$$

ou

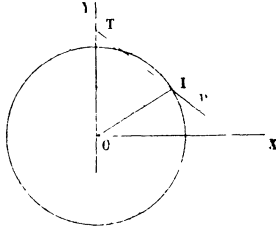
$$\widehat{LOK} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha \right) = \frac{\theta}{2} - \alpha = \frac{1}{2} \widehat{LIK};$$

donc le triangle OIL est isocèle et $IL = OI = R$. Il en résulte que PI prolongée coupe OY en un point T , tel que

$$TI = IL = R.$$

(456)

Donc le lieu du point P est celui d'un point d'une droite de longueur constante $TL = 2R$, glissant entre



deux droites rectangulaires OX , OY , qui sont les bissectrices de l'angle des droites données Ox , Oy . Ce lieu est une ellipse dont les axes $R + a$ et $R - a$ sont dirigés, respectivement, suivant OX et OY .