NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PELLET

Sur le nombre des points multiples d'une courbe algébrique et les courbes unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 444-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__444_0>

SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE ET LES COURBES UNICURSALES;

PAR M. E. PELLET.

1. Soient m le degré d'une courbe algébrique (A), non décomposable en courbes de degré inférieur, p_i le nombre de ses points multiples d'ordre i; $p_i = 0$ si i est supérieur à $m - 1$. K étant le nombre des points multiples, on a

$$K = \sum_{i=2}^{i=m-1} p_i.$$

Posons en outre

$$M = \sum_{i=2}^{i=m-1} i p_i.$$

Soit n un nombre entier tel que $\frac{n(n+3)}{2} \geqq K$; les K points multiples et $\frac{n(n+3)}{2} - K$ autres points pris sur la courbe définissent une courbe de degré n, qui a avec (A)

$$\frac{n(n+3)}{2} - K + M$$

points communs; comme (A) est indécomposable, on a

$$mn \geqq \frac{n(n+3)}{2} + M - K,$$

d'où

$$\frac{n(2m - n - 3)}{2} \geqq M - K.$$

2. *Maxima des nombres* M, K *et* p_i. — L'expression

$$\frac{n(2m-n-3)}{2}$$

acquiert sa valeur maximum pour

$$n=\frac{2m-3}{2},$$

et cette valeur maximum est

$$\frac{(2m-3)^2}{8}=\frac{4(m-1)(m-2)+1}{8}.$$

M — K étant entier, son maximum est $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; comme M est au moins égal à 2K, on voit que

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}\geqq K.$$

On a

$$\frac{n(2m-n-3)}{2}+K\geqq M.$$

Remplaçant chacun des termes du premier membre par sa valeur maximum, il vient

$$(m-1)(m-2)\geqq M.$$

Pour avoir le maximum de p_i, observons que

$$M-K=\sum_{i=2}^{i=m-1}(i-1)p_i.$$

Donc

$$\frac{n(2m-n-3)}{2}\geqq(i-1)p_i.$$

Dans le premier membre, n est un nombre entier tel que

$$\frac{n(n+3)}{2}\geqq p_i$$

ou

$$\frac{n(n+3)}{2} \geqq \frac{n(2m-n-3)}{2(i-1)},$$

d'où l'on tire

$$n \geqq \frac{2m-3i}{i}.$$

Ainsi, il faudra remplacer n par le plus petit nombre entier supérieur à $\frac{2m-3i}{i}$.

Soit $i=2$; $\frac{2m}{i}-3$ est alors égal à $m-3$; il faut donner à n la valeur $m-2$, ce qui donne pour maximum du nombre des points doubles $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Si i était supérieur à $\frac{m}{2}$, p_i serait au plus égal à 1.

3. Nous allons en outre établir une relation entre M et K, qui nous sera utile. Soit n un nombre tel que $\frac{n(n+3)}{2} < \mathrm{K}$; posons, pour abréger, $\frac{n(n+3)}{2} = \mu$. Par μ des points multiples on peut faire passer une courbe de degré n; si l'on désigne par $i, i_1, \ldots, i_{\mu-1}$ les degrés de multiplicité de ces points, on a

$$mn \geqq i + i_1 + \ldots + i_{\mu-1},$$

et le nombre des inégalités qu'on obtient ainsi est égal au nombre de combinaisons de K objets μ à μ, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{K}(\mathrm{K}-1)\ldots(\mathrm{K}-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}.$$

La somme des seconds membres de ces inégalités contient le même nombre de fois chacun des nombres $i, i_1, \ldots, i_{\mu-1}$, et ce nombre est égal à celui des combinaisons complètes de $h - 1$ objets pris $\mu - 1$ à $\mu - 1$, soit

$$\frac{(K-1)\dots(K-\mu+1)}{1.2\dots(\mu-1)}.$$

Ainsi

$$\frac{K(K-1)\dots(K-\mu+1)}{1.2\dots\mu} mn \geq \frac{(K-1\dots(K-\mu+1)}{1.2\dots(\mu-1)} M,$$

ou, en simplifiant et remplaçant μ par $\frac{n(n+3)}{2}$,

$$\frac{2mK}{n+3} > M.$$

Dans cette inégalité, n est un nombre tel que $\frac{n(n+3)}{2} < K$, et l'on constate aisément qu'elle a encore lieu si $\frac{n(n+3)}{2} = K$.

4. Supposons actuellement que n soit un nombre entier tel que $\frac{n(n+3)}{2} > K$; les K points multiples de la courbe (A) et $\frac{n(n+3)}{2} - K - 1$ autres points pris sur cette courbe déterminent un faisceau de courbes de degré n, dont l'équation générale contient un paramètre variable au premier degré, et qui ont chacune avec (A)

$$\frac{n(n+3)}{2} - K + M - 1$$

points communs, savoir : les K points multiples qui comptent pour M et les $\frac{n(n+3)}{2} - K - 1$ points simples choisis sur la courbe. Chaque courbe du faisceau rencontre donc (A) en

$$mn - \frac{n(n+3)}{2} + K - M + 1$$
$$= \frac{n(2m-n-3)}{2} + K - M + 1$$

points seulement, variables avec le paramètre qui définit la courbe. Si ce nombre se réduit à l'unité, les points de la courbe (A) se déterminent individuellement, et elle appartient au genre de courbes appelées *unicursales* par M. Cayley. Ainsi, n étant le plus petit nombre tel que $\frac{n(n+3)}{2} > K$, la courbe (A) est unicursale si l'on a

$$(1) \qquad \frac{n(2m-n-3)}{2} + K - M = 0.$$

Ce caractère est plus simple que celui donné par M. Chasles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 1354). Lorsqu'on aura reconnu qu'une courbe satisfait à la condition exprimée par l'équation (1), on pourra exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction rationnelle d'une variable par la méthode exposée par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 252.

5. On reconnaît aisément que les courbes d'ordre m qui ont un point multiple d'ordre $m-1$ satisfont à l'équation (1). Il en est de même de celles qui ont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles. Il faut alors prendre n égal à $m-2$; $M=(m-1)(m-2)$, et l'équation (1) est satisfaite. Mais on peut chercher, pour une valeur donnée de K, quelles sont les courbes satisfaisant à l'équation (1). On ne peut en trouver si

$$K = \frac{n_1(n_1+3)}{2},$$

n_1 étant entier. En effet, il faut faire $n = n_1 + 1$, et l'équation (1) devient

$$\frac{(n_1+1)(2m-n_1-4)}{2} + \frac{n_1(n_1+3)}{2} - \mathrm{M} = 0$$

ou

$$mn_1 + m - 2 - n_1 - \mathrm{M} = 0.$$

Or, d'après le n° 3, $\mathrm{M} \leqq mn_1$ et n_1 est inférieur à $m-2$.

Les plus petites valeurs qu'on peut donner à K après 1 sont donc 3 et 4. Alors il faut prendre $n=2$, et l'équation (1) devient

$$2m - 2 - \mathrm{M} = 0,$$

dans le cas où $\mathrm{K} = 3$. Comme M est au plus égal à $\frac{6m}{4}$ d'après le n° 3, il sera impossible de satisfaire à cette équation si

$$2m - 2 > \frac{6m}{4} \quad \text{ou} \quad m > 4.$$

Pour $\mathrm{K} = 4$, l'équation (1) devient

$$2m - 1 - \mathrm{M} = 0,$$

et l'on reconnaît qu'elle est satisfaite si $m = 2\mu + 1$, en supposant que la courbe ait trois points multiples de degré μ, et un point multiple de degré $\mu+1$; et si $m = 2\mu$, en supposant qu'elle ait trois points multiples de degré μ, et un de degré $\mu - 1$.

6. Soient a, b, c, d les quatre points multiples donnés : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des droites ab, bc, cd, da. Posons, pour abréger,

$$\mathcal{S} = \alpha\gamma, \quad \mathcal{S}_1 = \beta\delta.$$

L'équation

$$\mathrm{A}\mathcal{S}^{\mu} + \mathrm{B}\mathcal{S}_1\mathcal{S}^{\mu-1} \ldots + \mathrm{K}\mathcal{S}_1^{\mu-1}\mathcal{S} + \mathrm{L}\mathcal{S}_1^{\mu} = 0,$$

où A, B..., K, L sont des binômes du premier degré et homogènes en α et δ, de la forme $m\alpha + n\delta$, m et n étant des constantes, représente une courbe de degré $2\mu + 1$, pour laquelle a est un point multiple de degré $\mu + 1$ et b, c, d des points multiples de degré μ. Elle renferme $2\mu + 1$ constantes arbitraires.

Soit $\varepsilon = 0$ l'équation de la droite bd; l'équation

$$A S^{\mu-1} + B S_1 S^{\mu-2} + \ldots + K S_1^{\mu-2} S + L S_1^{\mu-1} = 0,$$

où A, B, ..., K, L sont des trinômes de la forme

$$m\alpha\varepsilon + n\varepsilon\delta + p\delta\alpha,$$

m, n et p étant des constantes, représente une courbe de degré 2μ, pour laquelle a, b, d sont des points multiples de degré μ, et c un point multiple de degré $\mu - 1$. Elle contient $3\mu - 1$ constantes arbitraires.

Pour exprimer les coordonnées d'un point de ces courbes en fonction rationnelle d'une variable θ, on cherchera, conformément au n° 5, leur intersection avec la conique

$$S - \theta S_1 = 0.$$

Pour les courbes du second genre, par exemple, le point d'intersection variable avec θ sera sur la conique

$$A\theta^{\mu-1} + B\theta^{\mu-2} + \ldots + K\theta + L = 0,$$

dont l'équation peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\mathcal{A}}{\alpha} + \frac{\mathcal{B}}{\varepsilon} + \frac{\mathcal{C}}{\delta} = 0,$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant des polynômes du degré $\mu - 1$ en θ.

Or, γ et β peuvent s'exprimer en fonction homogène de α, δ, ε; substituant dans l'équation

$$S - \theta S_1 = 0,$$

celle-ci pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\mathcal{A}'}{\alpha} + \frac{\mathcal{B}'}{\varepsilon} + \frac{\mathcal{C}'}{\delta} = 0,$$

$\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ étant du premier degré en θ. Les équations (1) et (2) déterminent les rapports

$$\frac{\delta}{\varepsilon}, \frac{\alpha}{\varepsilon},$$

par exemple, en fonction rationnelle de θ. On aurait un calcul semblable pour les courbes du premier genre.

7. Dans le cas général, la courbe auxiliaire de degré n, considérée au n° 4, qui passe par les K points multiples de la courbe (A) et

$$\frac{n(n+3)}{2} - K - 1$$

autres points choisis sur cette courbe, et dont l'équation contient un paramètre arbitraire θ au premier degré, coupe la courbe (A) en

$$\frac{n(2m-n-3)}{2} + K - M + 1 = V$$

points, variables avec le paramètre θ. Les coordonnées de ces V points peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de θ et des racines d'une équation de degré ν, dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de θ. Dans le cas particulier où $\nu = 2$, c'est-à-dire où

$$(2) \qquad \frac{n(2m-n-3)}{2} + K - M - 1 = 0,$$

les coordonnées d'un point de la courbe (A) s'expriment rationnellement en fonction de θ et de la racine carrée d'un polynôme en θ. L'équation (2) est vérifiée lorsque la courbe (A) possède $\frac{(m-1)(m-2)}{2} - 2$ points doubles, deux de moins que le nombre maximum. En effet, dans ce cas, il faut prendre $n = m - 3$; $M = (m-1)(m-2) - 4$, et l'équation (2) est vérifiée.

Pour $K = 4$, elle est vérifiée en supposant, si $m = 2\mu + 1$, que la courbe ait quatre points multiples de degré μ, et, si $m = 2\mu$, en supposant qu'elle ait deux points multiples de degré μ et deux autres de degré $\mu - 1$.

8. En conservant les mêmes notations qu'au n° 6, l'équation générale des courbes du premier genre est

$$A S^{\mu} + B S_1 S^{\mu-1} + \ldots + K S_1^{\mu-1} S + 4 S_1^{\mu} = 0,$$

A, B, ..., K, étant des polynômes du premier degré et homogènes en α, β, γ; elle contient $3\mu + 2$ constantes arbitraires.

L'équation générale des courbes du second genre est

$$A S^{\mu-1} + B S_1 S^{\mu-2} + \ldots + K S_1^{\mu-2} S + L S_1^{\mu-1} = 0,$$

A, B, ..., L étant des polynômes du second degré, de la forme

$$m \alpha^2 + n \alpha \varepsilon + p \varepsilon \delta + q \delta \alpha = 0,$$

en supposant que a et b soient les deux points multiples de degré μ; m, n, p, q sont des constantes arbitraires. Si l'on considère une courbe du premier genre, elle coupe la conique

$$S - \theta S_1 = 0$$

en deux points seulement variables avec θ; ces points sont situés sur la droite

$$A\theta^{\mu} + B\theta^{\mu-1} + \ldots + K\theta + L = 0.$$

Leurs coordonnées s'expriment donc rationnellement en fonction de θ et de la racine carrée d'un polynôme entier en θ.

Une courbe du second genre coupe la conique

$$\mathcal{S} - \theta\mathcal{S}_1 = 0$$

en deux points également variables avec θ. Ces points sont situés sur la conique

$$A\theta^{\mu-1} + B\theta^{\mu-2} + \ldots + K\theta + L = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$M\alpha^2 + N\alpha\varepsilon + P\varepsilon\delta + Q\delta\alpha = 0,$$

M, N, P, Q étant des polynômes du degré $\mu - 1$ en θ.

Or $\mathcal{S} - \theta\mathcal{S}_1$ peut se mettre sous la forme (n° 6)

$$\mathcal{A}\varepsilon\delta + \mathcal{B}'\delta\alpha + \mathcal{C}'\alpha\varepsilon = 0.$$

Les deux coniques représentées par les équations précédentes se coupent évidemment en deux points variables avec θ, qui sont situés sur la droite

$$M\mathcal{A}'\alpha + (N\mathcal{A}' - \mathcal{C}'P)\varepsilon + (Q\mathcal{A}' - \mathcal{B}'P)\delta = 0.$$