

V. JAMET

**Sur une classe de surfaces du  
quatrième ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 20  
(1881), p. 434-443

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1881\\_2\\_20\\_434\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_434_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## **SUR UNE CLASSE DE SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE ;**

PAR M. V. JAMET,

Professeur au lycée de Nice (¹).

---

VII. Voyons maintenant comment se transforment, dans un cône du second ordre, les lignes et les plans qui jouent un certain rôle dans l'étude de cette surface, par exemple les focales et les plans cycliques.

Toute droite passant par le sommet du cône transformé se transforme en une circonférence passant par les deux points singuliers de la girocyclide. En particulier, comme les focales du cône font avec chacune de

---

(¹) Voir même Tome, p. 385.

ses génératrices des angles dont la somme est constante, elles se transforment en deux circonférences, faisant avec chacune des circonférences génératrices de la girocyclide deux angles dont la somme est constante : ce qui revient à dire que chacune des génératrices du cône tangent fait avec les tangentes à ces deux circonférences deux angles dont la somme est constante. Ainsi, aux génératrices du cône transformé correspondent deux circonférences passant par les points singuliers de la surface, et dont les tangentes en ces points sont les focales des cônes tangents. Nous les appellerons les *circonférences focales de la girocyclide*.

Les plans cycliques du cône transformé, c'est-à-dire les plans menés par le sommet de ce cône parallèlement aux plans de ses sections circulaires, se transforment en des sphères passant par les deux points singuliers de la surface. Le centre d'une de ces sphères se trouve sur la perpendiculaire abaissée de l'un des points singuliers sur le plan cyclique correspondant du cône transformé. Nous en concluons que les plans tangents à ces sphères aux points singuliers sont les plans cycliques des cônes tangents. Nous appellerons ces sphères les *sphères cycliques de la surface*.

VIII. Chasles, dans un important Mémoire sur les cônes du second ordre, a démontré les deux théorèmes suivants, corrélatifs l'un de l'autre :

1° *Tout plan passant par le sommet d'un cône du second ordre coupe le cône et les deux plans cycliques suivant quatre droites, telles que les deux premières sont également inclinées sur les deux autres.*

2° *Si l'on mène deux plans tangents à un cône du second ordre, et que par leur intersection et les deux*

*focales on fasse passer deux plans, ces deux plans sont également inclinés sur les deux plans tangents.*

Nous en déduirons les deux théorèmes suivants :

1° *Toute sphère passant par les deux points singuliers d'une girocyclide du quatrième ordre coupe cette girocyclide et les deux sphères cycliques suivant quatre circonférences, telles que les deux premières font des angles égaux avec les deux autres.*

2° *Si, dans une girocyclide du quatrième ordre, on considère deux sphères enveloppées, et que par leur intersection et les deux circonférences focales on fasse passer des sphères, ces deux sphères coupent les deux sphères enveloppées sous des angles égaux.*

IX. Proposons-nous de chercher ce qui caractérise les girocyclides qui correspondent à des cônes de révolution. Comme tous les cônes transformés d'une girocyclide sont égaux au cône tangent en un des points singuliers, et que d'ailleurs les cônes tangents aux deux points singuliers sont symétriques par rapport à un plan, il s'ensuit que, pour que la girocyclide corresponde à un cône de révolution, il faut et il suffit que le cône tangent en un des points singuliers soit de révolution. S'il s'agit, par exemple, de la girocyclide représentée par l'équation

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 2ax + 2by + 2c(z - c)]^2 = 4Ax^2 + 4By^2,$$

on sait que le cône tangent au point  $(0, 0, c)$  a pour équation

$$[ax + by + c(z - c)]^2 = Ax^2 + By^2,$$

ou, en ordonnant,

$$(a^2 - A)x^2 + (b^2 - B)y^2 + c^2(z - c)^2 + 2bcy(z - c) + 2acx(z - c) + 2abxy = 0.$$

Si l'on suppose que  $a$  et  $b$  soient différents de 0, c'est-à-dire que la ligne qui joint les deux points singuliers ne soit pas dans l'un des plans menés par les axes de la conique, lieu des centres des sphères enveloppées, perpendiculairement au plan de cette conique, on trouve que, pour que le cône tangent soit de révolution, il faut que l'on ait

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0.$$

Mais, dans ce cas, la girocyclide se réduit à une sphère.

Si, au contraire, on suppose  $a = 0$ , les coefficients de deux des rectangles, dans l'équation du cône, sont nuls, et la condition pour qu'il soit de révolution est

$$(c^2 + A)(b^2 - B + \Lambda) = b^2 c^2,$$

ou bien

$$A b^2 + (A - B)c^2 + \Lambda(A - B) = 0,$$

ou encore

$$\frac{b^2}{A - B} + \frac{c^2}{A} + 1 = 0.$$

Ainsi, les points singuliers doivent être sur l'une des coniques, lieu des sommets des cônes de révolution qui ont pour base le lieu des centres des sphères enveloppées : on obtient ainsi les surfaces que M. Amigues appelle des *digirocyclides*.

Dans le Mémoire que j'ai cité plus haut, Chasles a encore démontré les deux théorèmes corrélatifs suivants :

1° *Deux plans tangents à un cône coupent les deux plans cycliques menés par un même axe de symétrie suivant quatre droites qui sont situées sur un même cône de révolution.*

2° *Les quatre plans menés par les deux focales d'un*

*cône du second ordre et deux génératrices de ce cône sont tangents à un même cône de révolution.*

Il en résulte les deux propositions suivantes :

1° *Deux des sphères enveloppées d'une girocyclide du quatrième ordre coupent les deux sphères cycliques suivant quatre circonférences qui sont des lignes de courbure d'une même digirocyclide.*

2° *Les quatre sphères menées par les deux circonférences focales d'une girocyclide du quatrième ordre et deux de ses lignes de courbure circulaires sont inscrites dans une même digirocyclide.*

X. Si l'on considère le cercle transformé d'une droite quelconque de l'espace, et qu'on joigne le centre de transformation à quatre points A, B, C, D pris sur cette droite, les quatre rayons vecteurs déterminent sur la circonférence quatre points dont le rapport anharmonique est égal au rapport (ABCD). Cela permet de déduire des propriétés des pôles et des plans polaires dans les cônes du second ordre les propositions suivantes :

1° Si par un point P de l'espace et par un des points singuliers d'une girocyclide du quatrième ordre on fait passer une circonférence quelconque, elle coupe la girocyclide en deux points, tels que le conjugué harmonique du point P par rapport à ces deux points se meut sur une sphère qui passe par les deux points singuliers.

Nous appellerons cette sphère la *sphère polaire du point P*.

2° Si un point se meut sur une circonférence passant par les deux points singuliers, sa sphère polaire est fixe. Nous l'appellerons la *sphère conjuguée de la circonférence*.

3° Si l'on considère une circonférence passant par les

deux points singuliers, il existe, sur la sphère conjuguée, une infinité de systèmes de deux circonférences qui passent aussi par les deux points singuliers et forment avec la première un système de trois circonférences conjuguées, c'est-à-dire telles que la sphère qui passe par deux quelconques d'entre elles est la sphère conjuguée de la troisième.

4<sup>o</sup> Dans toute girocyclide du quatrième ordre, il existe trois circonférences conjuguées rectangulaires. Nous les appellerons les *circonférences principales*. Les sphères passant par deux quelconques d'entre elles seront les sphères principales. Une sphère principale contient deux circonférences focales; toute sphère cyclique passe par une circonférence principale.

XI. Nous appellerons *girocyclides homofocales* deux girocyclides ayant même système de circonférences focales. Elles ont en même temps un même système de circonférences principales, et chacune de celles-ci fait des angles égaux avec deux des circonférences focales.

Des propriétés des cônes homofocaux nous déduirons les propriétés suivantes :

Par un point de l'espace on peut faire passer deux girocyclides du quatrième ordre, ayant pour focales deux circonférences données sur une même sphère; ces girocyclides se coupent à angle droit.

Si l'on imagine une circonférence C passant par le point donné et par les deux points communs aux deux focales, ces deux girocyclides couperont à angle droit les deux sphères qui passent elles-mêmes par les points communs aux deux focales et font des angles égaux avec les deux sphères menées par chacune des deux focales et la circonférence C.

Il faut encore remarquer que tous les cônes qui tou-

chent une série de girocyclides homofocales en un de leurs points singuliers communs sont eux-mêmes homofocaux.

XII. Dans toute girocyclide du quatrième ordre, les lignes de courbure de la seconde série ont pour transformées des coniques sphériques. Comme, dans l'étude de ces courbes, les grands cercles des sphères sur lesquelles elles sont tracées jouent un rôle important, je vais chercher à caractériser les courbes transformées de ces grands cercles.

Si, comme nous l'avons fait précédemment, nous prenons pour axe des  $z$  la ligne qui joint les deux points singuliers de la girocyclide et pour origine le milieu de leur distance, l'équation qui représentera l'une quelconque des sphères sur lesquelles se trouvent les lignes de courbure de seconde espèce sera, d'après un théorème démontré par M. Amigues,

$$(7) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z + c^2 = 0,$$

$c$  désignant, comme précédemment, la demi-distance des deux points singuliers.

La sphère correspondant au plan d'un des grands cercles de la sphère transformée aura pour équation

$$(8) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - c^2 = 0.$$

Le plan radical de ces deux sphères a pour équation

$$hx + ky - \lambda z + c^2 = 0.$$

Ce plan passe par le point dont les coordonnées sont  $x = 0, y = 0, z = \frac{c^2}{\lambda}$ ; pour une valeur donnée de  $\lambda$ , ce point est fixe et réel : c'est le conjugué harmonique du centre de la sphère (7) par rapport aux points singuliers de la girocyclide. Ainsi, les plans des circonférences qui



correspondent aux grands cercles d'une sphère ayant pour centre le sommet du cône transformé passent par un point fixe.

Ce point jouit d'une propriété remarquable : c'est le sommet d'un cône du second ordre ayant pour directrice la ligne de courbure déterminée par la sphère (7). En effet, soit l'équation de la girocyclide

$$(9) \quad (x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by - c^2)^2 = 4Ax^2 + 4By^2;$$

si, dans cette équation, on remplace  $x^2 + y^2 + z^2$  par sa valeur tirée de l'équation (7), il vient

$$(10) \quad (ax + by + \lambda z - c^2)^2 = Ax^2 + By^2,$$

de sorte que par l'intersection des surfaces (7) et (9) on peut faire passer le cône représenté par l'équation (10); son sommet est bien au point précédemment défini, et sa base est l'intersection du cône tangent en un quelconque des points singuliers avec le plan des  $xy$ . En outre, si l'on considère le cône tangent au point  $(0, 0, c)$ , par exemple, on voit facilement que la seconde courbe plane suivant laquelle ce cône coupe le cône représenté par l'équation (10) est située dans le plan représenté par l'équation

$$2ax + 2by + (c + \lambda)z - 2c^2 = 0.$$

Ce plan passe par une droite fixe située dans le plan des  $xy$  et dont l'équation est

$$ax + by - c^2 = 0;$$

c'est la corde des contacts des droites menées par l'origine, parallèlement aux asymptotes de la conique lieu des centres des sphères enveloppées, avec la conique

$$(ax + by - c^2)^2 = Ax^2 + By^2,$$

qui est la base commune au cône tangent et au cône (10).

En résumé : Les plans des cercles transformés des grands cercles des sphères concentriques au cône transformé passent par un point qui est le même pour une même sphère. Nous appellerons ces cercles les *cycles de la sphère* (7).

2<sup>o</sup> Toute ligne de courbure de la seconde espèce est sur un cône du second ordre dont le sommet est le point commun aux plans des cycles correspondants.

XIII. Les circonférences focales de la girocyclide coupent la sphère (7) en deux points que nous nommerons les *foyers de la ligne de courbure correspondante*.

Des propriétés angulaires des coniques sphériques, on déduit les propriétés suivantes :

Si par un point P, pris sur la sphère (7), on mène deux arcs de cycle tangents à la ligne de courbure correspondante, et qu'on joigne ce point aux foyers par des arcs de cycle, ces deux derniers arcs sont également inclinés sur les deux premiers.

En particulier, les deux arcs de cycle *vecteurs* d'un point de la ligne de courbure sont également inclinés sur l'arc de cycle tangent en ce point.

Si l'on joint l'un des foyers aux points de contact par des arcs de cycle, ces deux arcs sont également inclinés sur celui qui joint ce foyer au point P.

Si l'on imagine deux cycles tangents fixes et un arc de cycle tangent mobile, et qu'on joigne les points d'intersection de cet arc avec les deux arcs fixes à l'un des foyers par des arcs de cycle, ceux-ci forment entre eux un angle constant.

La sphère conjuguée d'une des circonférences focales coupe la sphère (7) suivant un cycle que nous appellerons le *cycle directeur de la conique*, et qui jouit des propriétés suivantes :

Si d'un point P, pris sur le cycle directeur d'une ligne de courbure de seconde espèce, on lui mène des cycles tangents, le cycle qui joint les points de contact passe par les foyers et est perpendiculaire à celui qui joint ce foyer au point P.

XIV. Enfin, ce qui précède permet d'écrire, dans le cas où la surface qu'on étudie est une digirocyclide, l'équation qui représente les plans des deux lignes de courbure circulaires suivant lesquelles la sphère (7) coupe la surface.

En effet, dans ce cas, l'équation (10) s'écrit

$$(by + \lambda z - c^2)^2 = Ax^2 + By^2.$$

Par l'intersection de cette surface avec la sphère (7), on peut faire passer la surface représentée par l'équation suivante :

$$(11) \quad \begin{cases} (by + \lambda z - c^2)^2 \\ + (A - B)y^2 + Az^2 - 2A\lambda z + Ac^2 = 0, \end{cases}$$

et l'on reconnaît aisément : 1° que le discriminant de cette équation devient nul quand on tient compte de la relation

$$b^2c^2 = (c^2 + A)(b^2 - B + A);$$

2° que, dans ce cas, les deux plans représentés par l'équation (11) coupent le plan des  $xy$  suivant une même droite, dont la position ne dépend pas de  $\lambda$ .

Comme la sphère (7) coupe le plan des  $xy$  suivant le cercle fixe (réel ou imaginaire)  $x^2 + y^2 + c^2 = 0$ , on en conclut que les lignes de courbure de la seconde série sont circulaires et passent par deux points fixes. Cela concorde avec les résultats trouvés par M. Amigues.