NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. HENRY

Décomposition des nombres $f^{12} - 9g^{12}$ et du double de ces nombres en deux cubes rationnels

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 418-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__418_1>

DÉCOMPOSITION DES NOMBRES $f^{12} - 9g^{12}$ ET DU DOUBLE DE CES NOMBRES EN DEUX CUBES RATIONNELS;

PAR M. C. HENRY.

On doit à M. Édouard Lucas ces deux identités [1]

$$(1)\quad \begin{cases} (6LM + L^2 - 3M^2)^3 \\ \qquad + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 = 2^2.3^2 LM(L^2 + 3M^2)^2, \end{cases}$$

$$(2)\quad (L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L(L^2 + 3M^2),$$

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 91.

d'où l'on tire aisément, par des substitutions convenables, ce théorème (¹) :

Le quadruple et le carré de $4p^6 + 27q^6$ est décomposable en deux cubes rationnels.

De l'identité (2) on peut déduire également cette autre proposition :

THÉORÈME. — *Les nombres de la forme $f^{12} - 9g^{12}$ et leur double sont décomposables en deux cubes rationnels.*

En effet, si dans l'identité (2) on remplace

$$\begin{array}{lll} \mathrm{L} & \text{par} & f^6(f^{12} - 9g^{12}), \\ \mathrm{M} & \text{par} & 3g^6(f^{12} - g^{12}), \end{array}$$

on a facilement

$$\mathrm{L}^2 + 3\mathrm{M}^2 = (f^{12} + 3g^{12})^3,$$

et, en posant

$$\mathrm{A} = f^{12} - 9g^{12},$$

il vient

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{\mathrm{A}f^6 + 3g^6(f^{12} - g^{12})}{f^2(f^{12} + 3g^{12})}\right]^3 \\ \quad + \left[\dfrac{\mathrm{A}f^6 - 3g^6(f^{12} - g^{12})}{f^2(f^{12} + 3g^{12})}\right]^3 = \mathrm{A}. \end{array} \right.$$

Si, dans la même identité (2), on fait

$$\mathrm{L} = 4f^3g^3(f^6 - 9g^6),$$
$$\mathrm{M} = f^{12} - 18f^6g^6 + 9g^{12},$$

on a

$$(4) \qquad \left[\frac{\mathrm{L} + \mathrm{M}}{2fg(f^6 + 3g^6)}\right]^3 + \left[\frac{\mathrm{L} - \mathrm{M}}{2fg(f^6 + 3g^6)}\right]^3 = \mathrm{A}.$$

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XIX, p. 430.

Donc les nombres de la forme $f^{12} - 9g^{12}$ et leur double sont des sommes de deux cubes rationnels.

Les nombres f et g sont évidemment supposés inégaux.