S. RÉALIS

# Démonstration de propositions énoncées

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 20 (1881), p. 408-411

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__408_1>

## DÉMONSTRATION DE PROPOSITIONS ÉNONCÉES

(voir 2e série, t. XVII, p. 178);

PAR M. S. RÉALIS.

1° Si l'équation

$$x^3 + Px + Q = 0$$

admet la racine $a$, son premier membre est le produit de deux facteurs tels que $x - a$, $x^2 + ax + m$, où $m$ est nécessairement entier si P, Q, $a$ sont entiers.

On a donc

$$P = -a^2 + m, \quad Q = -am,$$

et par suite

$$P^2 - 4Qa = (a^2 + m)^2,$$

$$\begin{aligned}(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) &= (a^4 - 4ma^2 - m^2)^2 \\ &= [5(a^2 - 4m)^2 - (2a^2 - 9m)^2]^2 \\ &= [(a^2 - 2m)^2 - 5m^2]^2,\end{aligned}$$

$b$ et $c$ étant les deux autres racines de l'équation.

2° Si les trois racines $a$, $b$, $c$ sont entières, l'une d'elles est nécessairement un nombre pair (à cause de $a+b+c=0$). On peut donc poser

$$a = 2\alpha, \quad b = -\alpha + \beta, \quad c = -\alpha - \beta,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant entiers.

On aura donc

$$P = -(3\alpha^2 + \beta^2), \quad Q = -2\alpha(\alpha^2 - \beta^2),$$

et par suite

$$\begin{aligned}
P^2 - 4Qa &= (5\alpha^2 - \beta^2)^2 = [(5\alpha - 2\beta)^2 - 5(2\alpha - \beta)^2]^2,\\
P^2 - 4Qb &= (\alpha^2 + 4\alpha\beta - \beta^2)^2\\
&= [5\alpha^2 - (2\alpha - \beta)^2]^2 = [(\alpha + 2\beta)^2 - 5\beta^2]^2,\\
P^2 - 4Qc &= (\alpha^2 - 4\alpha\beta - \beta^2)^2\\
&= [5\alpha^2 - (2\alpha + \beta)^2]^2 = [(\alpha - 2\beta)^2 - 5\beta^2]^2.
\end{aligned}$$

En outre,

$$(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = [(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 16\alpha^2\beta^2]^2.$$

3° Deux racines $b$, $c$ étant exprimées par des nombres complexes entiers, la troisième racine $a$ ne peut être qu'un nombre pair.

On peut donc poser

$$a = 2\alpha, \quad b = -\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad c = -\alpha - \beta\sqrt{-1},$$

d'où

$$P = -(3\alpha^2 - \beta^2), \quad Q = -2\alpha(\alpha^2 + \beta^2),$$

et par suite

$$\begin{aligned}
P^2 - 4Qa &= (5\alpha^2 + \beta^2)^2,\\
(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) &= [5(2\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2]^2\\
&= [5(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha^2 - 2\beta^2)^2]^2\\
&= [(\alpha^2 + 9\beta^2)^2 - 5(4\beta^2)^2]^2\\
&= [(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 16(\alpha\beta)^2]^2.
\end{aligned}$$

4° Nous avons d'abord, par identité,

$$(P^2 - 4Qa)(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = (P^3 + 8Q^2)^2.$$

Si P et Q sont entiers, et que la quantité

$$-(4P^3 + 27Q^2)$$

soit égale à un carré $R^2$, il est visible que

$$\pm(P^3 + 8Q^2) = \frac{\pm 5Q^2 \mp R^2}{4}$$
$$= \frac{\pm(5Q + 2R)^2 \pm 5(2Q + R)^2}{4},$$

formules où l'on choisira les signes supérieurs, ou les signes inférieurs, de manière que chaque membre soit positif. On peut prouver d'ailleurs qu'un nombre entier compris dans la forme $\frac{5u^2 - v^2}{4}$ est compris aussi dans la forme $5u^2 - v^2$; de même pour un entier compris dans la forme $\frac{u^2 - 5v^2}{4}$ (*voir* la *Théorie des nombres* de Legendre, t. I, p. 205. Du reste, la preuve dont il s'agit peut aussi se tirer de formules directes, sans rien emprunter à la théorie des nombres).

Si c'est la quantité $4P^3 + 27Q^2$ qui est égale à un carré $R^2$, auquel cas Q et R sont nécessairement des nombres pairs, on a

$$P^3 + 8Q^2 = \frac{5Q^2 + R^2}{4},$$

où le second membre est évidemment un nombre de la forme $5u^2 + v^2$.

L'identité qui justifie et complète la proposition énoncée à la fin de la *Remarque* consiste dans la formule

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - kz^2,$$

dans laquelle

$$z = 3\alpha^2 + \beta^2,$$
$$k = A^2 + (A + B + C)^2 + C^2,$$
$$z_1 = A(2\alpha)^2 + B\,2\alpha(\alpha - \beta) + C(\alpha - \beta)^2,$$
$$z_2 = A(-\alpha + \beta)^2 + B(-\alpha + \beta)(\alpha + \beta) + C(\alpha + \beta)^2,$$
$$z_3 = A(\alpha + \beta)^2 + B(\alpha + \beta)2\alpha + C(2\alpha)^2.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\left(\frac{z_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{z}\right)^2 = k.$$

De la sorte, le second membre est indépendant de $\alpha$ et $\beta$, et peut représenter tout nombre égal à la somme de trois carrés entiers, tandis que le premier membre peut représenter, d'une infinité de manières, une somme de trois carrés rationnels.