A. Legoux

Note sur un système de courbes orthogonales et homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 406-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__406_0>

NOTE SUR UN SYSTÈME DE COURBES ORTHOGONALES ET HOMOFOCALES;

Par M. A. LEGOUX,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Les courbes qui font le sujet de cette Note sont représentées par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} = 1,$$

où λ est un paramètre variable, f une fonction de x et de y, a et b des constantes.

Ces courbes jouissent des propriétés suivantes :

1° Il en passe deux par un point quelconque du plan.

2° Elles ont une enveloppe qui est identique à celle des coniques représentées par l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} = 1.$$

Cette enveloppe se compose donc d'un système de quatre droites imaginaires passant par les points circulaires de l'infini.

Il résulte de là que, quelle que soit la fonction f, toutes les courbes représentées par l'équation (1) ont des foyers qui coïncident avec les foyers des coniques représentées par l'équation (2).

3° Les courbes représentées par l'équation (1) ne sont pas orthogonales en général. Il faut pour cela que la fonction f satisfasse à une équation aux dérivées partielles, qu'on obtient sans peine en exprimant la condition d'orthogonalité, et qui est la suivante

$$(ab + bx^2 + ay^2)(p^2 + q^2) = 2f(bpx + aqy),$$

où p et q représentent $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$.

Si l'on fait $a = 0$ dans l'équation (1), cette équation devient

$$(3) \qquad x(p^2 + q^2) = 2fp.$$

En appliquant les formules connues pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, on trouve

$$p = \alpha x, \quad q = \sqrt{2\alpha f - \alpha^2 x^2},$$

α représentant une constante arbitraire. Substituant dans $df = p\,dx + q\,dy$, on a

$$df = \alpha x\,dx + \sqrt{2\alpha f - \alpha^2 x^2}\,dy,$$

d'où

$$dy = \frac{df - \alpha x\,dx}{\sqrt{\alpha}\sqrt{2f - \alpha x^2}},$$

d'où enfin

$$(4) \qquad 2f = \alpha[x^2 + (y + \beta)^2],$$

β étant une autre constante. C'est une intégrale complète de l'équation (3). Si l'on remplace f par cette valeur dans l'équation (1), on obtient des quartiques bicirculaires; mais, si l'on remplace f par l'intégrale générale, à cause de la fonction arbitraire qui entre dans cette intégrale, on aura une infinité de systèmes orthogonaux.

On sait que l'on obtient l'intégrale générale en éliminant α et β entre l'équation (4) et les deux suivantes,

$$\beta = \varpi(\alpha),$$

$$\frac{df}{d\alpha} + \frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

où ϖ est une fonction arbitraire.

Si l'on pose, par exemple, $\beta = \alpha^m$, on en déduira

$$2f = \left[\frac{-(m+1)y + \sqrt{(m+1)^2 y^2 - (2m+1)(x^2+y^2)}}{2m+1}\right]^{\frac{1}{m}}$$
$$\times \left\{ x^2 + \left[\frac{my + \sqrt{(m+1)^2 y^2 - (2m+1)(x^2+y^2)}}{2m+1}\right]^2 \right\}.$$

Pour $m = 1$, on a

$$27f = -y(y^2 + 9x^2) \pm (y^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

En mettant à la place de f dans l'équation (1) cette dernière valeur, on trouve un système de courbes orthogonales du douzième ordre, qui ont pour points quadruples les points circulaires de l'infini.