

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20 (1881), p. 380-384

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__380_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS.

1364. Les équations réciproques, dont les transformées, en posant $t = x + \frac{1}{x}$, sont également réciproques, sont de la forme

$$F[(x+1)^k, (x-1)^k](x^2+x+1)^n \cdot (x^2-x+1)^{n'} = 0,$$

$F[(x+1)^k, (x-1)^k]$ désignant une fonction entière et homogène de $(x+1)^k$ et $(x-1)^k$.

On suppose que l'équation primitive n'admet pas pour racine 1 ou -1 (PELLET.)

1365. Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} \\ + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} - \dots = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre $-a$ et $+a$. (ESCARV.)

1366. Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} \\ + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} + \dots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à a .

(ESCARV.)

1367. 1° Si une équation $f(x) = 0$ est ordonnée et de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \psi(x) = 0,$$

φ et ψ n'ayant que des permanences et α, β, γ étant des nombres positifs tels que $\beta^2 = \alpha\gamma$, l'équation n'a pas de racines réelles positives.

2° Si quatre coefficients consécutifs d'une équation sont $b + c, b, c, b - c$, de sorte que

$$f(x) = \dots (b+c)x^{p+1} \\ + bx^p + cx^{p-1} + (b-c)x^{p-2} + \dots = 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

3° Si quatre coefficients consécutifs sont a, b, a, b , de telle sorte que

$$f(x) = \dots ax^{p+1} + bx^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \dots = 0,$$

l'équation a, au moins, deux racines imaginaires.

On propose de généraliser cette proposition et de faire voir que, si trois coefficients consécutifs a, b, c se reproduisent trois fois périodiquement, de telle sorte que l'on trouve dans l'équation $a, b, c; a, b, c; a, b, c$, comme étant 9 coefficients consécutifs, l'équation a, au moins, quatre racines imaginaires, et ainsi de suite.

En supposant que les coefficients a_1, a_2, \dots, a_p se reproduisent p fois périodiquement, dire combien l'équation a, au moins, de racines imaginaires.

On distinguera les cas de p pair et de p impair.

(G. DE LONGCHAMPS.)

1368. Soient $OA = OB = OC$ trois longueurs égales portées sur trois axes rectangulaires; A_1, B_1, C_1 les projections orthogonales des points A, B, C sur un plan quelconque passant par le point O .

Si l'on pose

$$OA_1 = a; \quad OB_1 = b; \quad OC_1 = c;$$

$$\widehat{B_1OC_1} = \alpha; \quad \widehat{C_1OA_1} = \beta; \quad \widehat{A_1OB_1} = \gamma;$$

on aura

$$\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{b^2}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{c^2}{\sin \gamma \cos \gamma} = l^2;$$

$$AA_1 = \frac{a}{\cos \alpha} \sqrt{-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma};$$

$$BB_1 = \frac{b}{\cos \beta} \sqrt{-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma};$$

$$CC_1 = \frac{c}{\cos \gamma} \sqrt{-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma};$$

$$OA = OB = OC = l \sqrt{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

Discuter ces formules.

(GENTY.)

1369. Par le centre d'un ellipsoïde on mène trois plans rectangulaires quelconques A, B, C ; si l'on nomme α, β, γ les angles que forment ces plans avec un plan

diamétral fixe P; a, b les axes de la section de la surface par le plan P; a_1, b_1, c_1 les demi-diamètres de cette section dirigés suivant les droites (A, P) (B, P), (C, P), on aura

$$\frac{\sin^2 \alpha}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b_1^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{c_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

(GENTY.)

1370. Une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes AA_1, BB_1 ; par l'un des sommets réels A passe une sécante AMM' ; et les tangentes en M et en M' se rencontrent en T: on demande de construire les deux courbes, connaissant les points A, M, T. (LAISANT.)

1371. Soient A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 trois diamètres quelconques de trois circonférences ayant O pour centre radical; M un point quelconque du plan; $OB_1D_1, OB_2D_2, OB_3D_3$ trois triangles symétriquement semblables à OMA_1, OMA_2, OMA_3 respectivement: démontrer que les trois points D_1, D_2, D_3 sont en ligne droite. (LAISANT.)

1372. On donne à un plan P un mouvement infiniment petit sur lui-même; son centre instantané de rotation O, et son cercle des centres C sont déterminés. Désignons par t la tangente en O à C.

Considérons une figure F dans P; le lieu géométrique φ des centres de courbure des trajectoires des points de F, ainsi que les figures F' et φ' , symétriques, respectivement, par rapport à t , des figures F et φ .

La figure F' est le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points de la figure φ' .

(DEWULF.)

1373. Si d'un point O d'une circonférence on abaisse les perpendiculaires OM, ON à deux côtés d'un triangle

inscrit, la projection du troisième côté sur MN est égale à MN .
(ERNEST CESARO.)

1374. On donne le plan et les trois angles d'un triangle ABC dont un sommet A est fixe ; trouver le lieu géométrique des points de l'espace d'où les trois côtés du triangle soient vus sous des angles droits.

On suppose que les trois angles donnés sont aigus.

1375. D'un point S , extérieur à un cercle O , on mène à ce cercle la tangente SA , et au centre la sécante SO , qui coupe la circonférence en B et C . Le point de contact A de la tangente sépare la demi-circonférence ABC en deux arcs AMB , ANC , qui forment les troisièmes côtés de deux triangles mixtilignes $SAMB$ et $SANC$. Si l'on fait tourner la figure autour de SO , ces deux triangles mixtilignes engendrent des volumes, qui sont respectivement équivalents aux deux cônes ayant pour rayons de base les deux segments SB , SC de la sécante et pour hauteur commune la projection OD du rayon de contact OA sur cette sécante ; c'est-à-dire que

$$\text{vol. } SAMB = \frac{1}{3}\pi \overline{SB}^2 \cdot OD, \text{ et vol. } SANC = \frac{1}{3}\pi \overline{SC}^2 \cdot OD.$$

(G. DOSTOR.)