NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. FAUQUEMBERGUE

Solution d'une question de licence (faculté de Paris, 1875)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 35-38

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__35_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE PARIS, 1875);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Déterminer une courbe (c) *telle que si l'on forme une de ses transformées* (C) *par rayons vecteurs réciproques relativement à un pôle donné* O, *les rayons de courbure en deux points correspondants* m *et* M *des deux courbes* (c) *et* (C) *soient dans un rapport donné.*

Donnons d'abord une expression simple du rayon de courbure. On a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta + dV},$$

α étant l'angle de la tangente avec l'axe polaire et V l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur; mais

$$\cos V = \frac{dr}{ds}, \quad \sin V = \frac{r\,d\theta}{ds},$$

d'où, en éliminant ds et $d\theta$,

$$\rho = \frac{dr}{\cos V\, d\theta + \cos V\, dV} = \frac{r\,dr}{\sin V\, dr + r\cos V\, dV} = \frac{r\,dr}{d.r\sin V}.$$

Cette expression, ou encore, en appelant p la distance de la tangente à l'origine, $\rho = \frac{r\,dr}{dp}$, est celle que nous voulions obtenir.

Si l'on désigne par K le rapport des rayons de courbure aux points $m(r, \theta)$, $M(R, \theta)$, l'équation de condition sera

$$\text{(1)} \qquad \frac{r\,dr}{d.r\sin V} = \frac{KR\,dR}{d.R\sin V},$$

en remarquant que les angles V en ces deux points sont supplémentaires.

On a d'ailleurs, par définition,

$$Rr = a^2,$$

d'où

$$R = \frac{a^2}{r}, \quad dR = -\frac{a^2}{r^2}\,dr.$$

Substituant dans l'équation (1), elle devient

$$\frac{r\,dr}{d.r\sin V} = -\frac{Ka^4\,dr}{r^3 d.\frac{a^2}{r}\sin V}.$$

On tire de là

$$\frac{d.\sin V}{\sin V} = \frac{r^2 - Ka^2}{r(r^2 + Ka^2)}\,dr = -\frac{dr}{r} + \frac{2r\,dr}{r^2 + Ka^2},$$

et, en intégrant,

$$\log\sin V = -\log r + \log C(r^2 + Ka^2)$$

ou

$$\sin V = \frac{C(r^2 + Ka^2)}{r}.$$

Égalant cette valeur de $\sin V$ à celle $\dfrac{r}{\sqrt{r^2+\dfrac{dr^2}{d\theta^2}}}$ donnée plus haut, on aura l'équation différentielle de la courbe,

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+\dfrac{dr^2}{d\theta^2}}} = \frac{C(r^2+Ka^2)}{r};$$

d'où

$$(2)\qquad \frac{1}{C}\,d\theta = \frac{(r^2+Ka^2)\,dr}{r\sqrt{r^2-C^2(r^2+Ka^2)^2}},$$

$$\frac{1}{C}\,d\theta = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-C^2(r^2+Ka^2)^2}} + Ka^2\,\frac{dr}{r\sqrt{r^2-C^2(r^2+Ka^2)^2}}.$$

Le premier terme du second membre peut s'écrire

$$\frac{d.(r^2)}{2C\sqrt{-K^2a^4+\left(\dfrac{1}{C^2}-2Ka^2\right)(r^2)-(r^2)^2}};$$

l'intégrale est

$$\frac{1}{2C}\arc\cos\frac{1-2KC^2a^2-2C^2r^2}{\sqrt{1-4KC^2a^2}}.$$

Le second terme peut se mettre sous une forme analogue, après avoir divisé haut et bas par r^3 :

$$-\frac{1}{2C}\,\frac{d(r^{-2})}{\sqrt{-\dfrac{1}{K^2a^4}+\dfrac{1}{K^2a^4}\left(\dfrac{1}{C^2}-2Ka^2\right)(r^{-2})-(r^{-2})^2}}.$$

On trouve, pour l'intégrale,

$$-\frac{1}{2C}\arc\cos\frac{1-2KC^2a^2-2K^2a^4C^2r^{-2}}{\sqrt{1-4Ka^2C^2}}.$$

On aura donc, pour l'intégrale de l'équation (2),

$$2(\theta - \theta_0) = \arc\cos \frac{1 - 2KC^2a^2 - 2C^2r^2}{\sqrt{1 - 4Ka^2C^2}}$$
$$- \arc\cos \frac{1 - 2KC^2a^2 - 2K^2a^4C^2r^{-2}}{\sqrt{1 - 4Ka^2C}},$$

θ_0 étant la constante d'intégration.

En prenant les cosinus des deux membres, on trouve, après des transformations connues,

$$\cos 2(\theta - \theta_0) = \frac{-2K^2a^4C^2 + r^2 - 2C^2r^4}{(1 - 4Ka^2C^2)r^2}$$

ou

$$C^2r^4 - [\sin^2(\theta - \theta_0) + 2Ka^2C^2\cos 2(\theta - \theta_0)]r^2 + K^2a^4C^2 = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe demandée.