Concours général de 1880

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 314-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__314_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880

(voir 2e série, t. XX, p. 13.)

PHILOSOPHIE.

PAR M. MORET-BLANC.

La Terre étant supposée sphérique, on considère le point M *de la surface dont la latitude est égale à la longitude :*

1° *Déterminer le lieu des projections* M *sur le plan de l'équateur ;*

2° *Déterminer le lieu des droites* AM, A *étant le point de l'équateur à partir duquel on compte les longitudes.*

Soient O le centre de la Terre et B le point où le demi-méridien de M coupe l'équateur.

1° Les arcs MB, AB étant égaux, les points M et A se projettent au même point m sur l'intersection OB des plans de l'équateur et du méridien de M. Le point m est la projection de M sur le plan de l'équateur. L'angle AmO étant droit, le lieu du point m est la circonférence décrite sur AO comme diamètre.

2° Le triangle AmM étant rectangle en m et de plus isoscèle, l'angle MAm de la droite AM et de sa projection Am sur le plan de l'équateur est de 45°. Par suite, la droite AM fait, de même, un angle de 45° avec la perpendiculaire AC, élevée en A au plan de l'équateur. La droite AM appartient donc à la surface d'un cône de révolution ayant A pour sommet et AC pour axe, et dont les génératrices font avec l'axe un angle de 45°. Le lieu de la droite AM est la partie de la surface de ce cône qui est, par rapport au plan tangent à la sphère en A, située du même côté que la sphère.

RHÉTORIQUE.

PAR M. MORET-BLANC.

Aux deux extrémités A *et* B *du diamètre* AB *d'un demi-cercle, on lui mène deux tangentes; on construit ensuite une troisième tangente qui coupe les deux premières aux points* C *et* D. *On demande de déterminer cette troisième tangente de manière que le volume engendré par le trapèze* ABDC *en tournant autour du diamètre* AB, *et la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre, soient entre eux dans le rapport de m à 1. Discussion.*

Soient O le centre du demi-cercle, R son rayon et E le point de contact de la tangente CD. Posons

$$AC = x, \quad BD = y.$$

Le trapèze ABDC, en tournant autour de AB, engendre un tronc de cône dont le volume a pour expression

$$\frac{2}{3}\pi R(x^2 + y^2 + xy),$$

et l'on a

$$\frac{2}{3}\pi R(x^2 + y^2 + xy) = \frac{4}{3}\pi m R^3$$

ou

(1) $$x^2 + y^2 + xy = 2m\,\mathrm{R}^2.$$

Les lignes OC, OD étant les bissectrices des angles supplémentaires DCA, CDB, la somme des angles OCD et ODC égale un droit, et, par suite, l'angle COD est droit. D'ailleurs

$$\mathrm{AC} = \mathrm{CE} = x, \quad \mathrm{DE} = y.$$

Le triangle rectangle COD donne

(2) $$xy = \mathrm{R}^2.$$

En combinant les équations (1) et (2), on a

$$(x+y)^2 = (2m+1)\,\mathrm{R}^2,$$
$$(x-y)^2 = (2m-3)\,\mathrm{R}^2,$$

d'où

$$x = \frac{\mathrm{R}\left[\sqrt{2m+1} + \sqrt{2m-3}\right]}{2},$$

$$y = \frac{\mathrm{R}\left[\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-3}\right]}{2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

$$m > \frac{3}{2}.$$

Dans le cas du minimum,

$$m = \frac{3}{2}, \quad x = y = \mathrm{R}.$$

Le tronc de cône se réduit au cylindre circonscrit à la sphère.

SECONDE.

PAR UN ABONNÉ.

Sur le côté BC *d'un triangle* ABC, *ou sur son prolongement, on prend un point arbitraire* D, *et l'on fait passer deux circonférences, l'une par les points* A, B, D, *l'autre par les points* A, C, D; *soient* O, O′ *les centres de ces circonférences. On propose :*

1° *De démontrer que le rapport des rayons de ces circonférences est indépendant de la position du point* D *sur le côté* BC;

2° *De déterminer la position que doit occuper le point* D *pour que les deux rayons aient la plus petite longueur possible ;*

3° *De démontrer que le triangle* AOO′ *est semblable au triangle* ABC;

4° *De trouver le lieu décrit par le point* M *qui partage la droite* OO′ *dans le rapport de deux longueurs données* m, n; *on examinera le cas particulier où le point* M *est le pied de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur* OO′.

La droite OO′ étant perpendiculaire à AD en son milieu d, les angles AOd, ABD ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AD de la circonférence O, et les angles A$O'd$, ACd ont pour mesure la moitié de l'arc AD de la circonférence O′; donc

$$\widehat{AOO'} = \widehat{ABC} \quad \text{et} \quad \widehat{AO'O} = \widehat{ACB},$$

d'où

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{AB}{AC},$$

et, par conséquent:

1° Le rapport des rayons AO, AO′ des circonférences

O, O′ est indépendant de la position du point D sur le côté BC.

2° Les angles des triangles rectangles AdO, AdO' étant invariables, il en est de même des rapports

$$\frac{AO}{Ad}, \quad \frac{AO'}{Ad};$$

il s'ensuit que les plus petites valeurs des rayons AO, AO′ correspondent au minimum de Ad ou de AD; le minimum de AD est la perpendiculaire abaissée du point A sur BC. Les centres O, O′ coïncident alors avec les milieux b, c des côtés AB, AC, et les rayons AO, AO′ des circonférences O, O′ ont pour valeurs

$$\frac{AB}{2}, \quad \frac{AC}{2}.$$

3° Le triangle AOO′ est semblable au triangle ABC, puisque les angles AOO′, AO′O sont égaux respectivement aux angles ABC, ACB.

4° Soit m le point qui partage la droite bc dans le rapport donné de OM à MO′; les triangles bAm, OAM seront semblables, et l'on aura

$$\widehat{bAm} = \widehat{OAM} \quad \text{et} \quad \frac{Ab}{Am} = \frac{AO}{AM}.$$

Il en résulte que les triangles bAO, mAM sont, de même, semblables. En effet

$$\widehat{bAO} = \widehat{mAM},$$

parce que ces angles sont égaux aux angles bAm, OAM, augmentés ou diminués, tous deux, de l'angle OAm. De plus, l'égalité

$$\frac{Ab}{Am} = \frac{AO}{AM}$$

donne

$$\frac{Ab}{AO} = \frac{Am}{AM};$$

donc les triangles bAO, mAM sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels. Mais le triangle bAO est rectangle en b; donc l'angle AmM est droit. Par conséquent, le lieu géométrique du point M est la perpendiculaire menée à la droite Am, au point m.

Lorsque AM est perpendiculaire sur OO', la droite bc est perpendiculaire à Am, puisque les triangles bAm, OAM sont semblables, et, dans ce cas, le lieu géométrique de M est la droite bc qui passe par les milieux b, c des côtés AB, AC.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et J. Delacourcelle, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Tarbes.

TROISIÈME.

PAR M. MORET-BLANC.

PREMIÈRE QUESTION. — *Par les deux extrémités d'une droite* AB, *et d'un même côté de cette droite, on lui élève deux perpendiculaires* AC *et* BD, *telles que l'aire du trapèze* ABCD *ait une valeur constante donnée. Du milieu* E *de la droite* AB, *on abaisse une perpendiculaire* EM *sur la droite* CD. *Trouver le lieu décrit par le pied* M *de cette perpendiculaire quand on fait varier les longueurs des perpendiculaires* AC *et* BD.

Même problème quand les lignes AC *et* BD, *au lieu d'être perpendiculaires à* AB, *sont parallèles à une droite fixe donnée.*

Soit m^2 l'aire donnée du trapèze ABCD. On a

$$\frac{AC + BD}{2} \times AB = m^2.$$

Soit F le milieu de CD; la ligne EF, parallèle à AC et à BD, sera perpendiculaire à AB et égale à

$$\frac{AC + BD}{2} = \frac{m^2}{AB},$$

troisième proportionnelle à AB et m.

Ayant élevé EF, perpendiculaire sur le milieu de AB et égale à cette longueur, le point F est le milieu de CD dans toutes ses positions. L'angle EMF étant droit, le lieu du point M est la circonférence décrite sur EF comme diamètre.

Si AC et BD sont parallèles à une droite fixe donnée, soit d leur distance; il faudra prendre $EF = \frac{m^2}{d}$ et parallèle à la droite donnée : le lieu du point M sera encore la circonférence décrite sur EF comme diamètre.

Deuxième question. — *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les deux diagonales, l'angle qu'elles forment entre elles, et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère. Discussion.*

Soient r le rayon du cercle circonscrit, d et d' les deux diagonales dont aucune évidemment ne doit surpasser $2r$, et θ leur angle.

Décrivons une circonférence avec le rayon donné, et dans cette circonférence inscrivons une corde AC, égale à la diagonale d; abaissons du centre O la perpendiculaire OI sur la corde AC; menons par O une droite qui fasse avec OI l'angle donné θ, et prenons sur cette droite

$$OH = OH' = \sqrt{r^2 - \frac{d'^2}{4}}.$$

La corde BD, menée par H ou par H′ perpendiculairement à HH′, sera la seconde diagonale du quadrilatère; mais, pour que ce quadrilatère soit convexe, il faut que les deux diagonales se rencontrent à l'intérieur du cercle.

Projetons A et C sur HH′, en a et c. Si les deux points H et H′ sont situés entre a et c, il y aura deux quadrilatères convexes satisfaisant à la question ; si un seul des points H, H′ est compris entre a et c, à ce point correspondra un quadrilatère convexe et à l'autre un quadrilatère étoilé. Si les deux points H et H′ sont hors du segment ac, les deux quadrilatères seront étoilés.

Si l'on faisait l'angle θ de l'autre côté de OI, on obtiendrait des solutions symétriques des premières par rapport à OI, et par conséquent des quadrilatères égaux aux précédents.