Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 280-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__280_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 329

voir 1re série, t. XV, p. 303),

PAR M. A. GENEIX-MARTIN.

Dans une progression géométrique de quatre termes, on donne la somme des antécédents et la somme des conséquents : trouver ces termes sans opérer d'élimination.

Voici une solution plus simple que celle qui est donnée, 1re série, t. XV, p. 303.

a, b, c, d étant les quatre termes, q la raison, on a

$$b = aq, \quad c = aq^2, \quad d = aq^3;$$

on a aussi

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

et

$$a + b + c = m,$$
$$b + c + d = n,$$

m et n étant des nombres donnés, d'où

$$a(1 + q + q^2) = m, \quad aq(1 + q + q^2) = n.$$

Divisant membre à membre,

$$q = \frac{n}{m}.$$

Or

$$a = \frac{m}{1+q+q^2} = \frac{m}{1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}} = \frac{m^3}{m^2+mn+n^2},$$

$$b = aq = \frac{m^2 n}{m^2+mn+n^2},$$

$$c = aq^2 = \frac{mn^2}{m^2+mn+n^2},$$

$$d = aq^3 = \frac{n^3}{m^2+mn+n^2}.$$

Question 1308

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 563 ;

PAR M. MORET-BLANC.

Soient O *un point fixe dans un plan,* M *un point qui se meut dans ce plan,* MV *la vitesse à un instant quelconque,* MU *l'accélération. Démontrer que l'aire du triangle* OMU *mesure la dérivée de l'aire variable du triangle* OMV *par rapport au temps.*

(LAISANT.)

Soient S l'aire du triangle OMV, S' sa dérivée par rapport au temps et Δt un temps très petit que nous ferons tendre vers zéro. Prenons sur MU la longueur $MU_1 = MU.\Delta t$; construisons le parallélogramme MVV_1U_1 et le triangle MOU_1. On a

$$S' = \lim \frac{OMV_1 - OMV}{\Delta t}$$
$$= \lim \frac{OMU_1}{\Delta t} = \lim \frac{OMU.\Delta t}{\Delta t} = OMU.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. G. Bardelli, à Milan; C. Bergmans, répétiteur à l'École du Génie civil de Gand; J. Krantz; L. Julliard; Lacombe, à Bar-sur-Seine; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Question 1357

(voir 2e série, t. XX, p. 48);

PAR M. A. AIGNAN,
Élève du lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

ABC *étant un triangle donné, on joint ses sommets à un point* O *de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments : trouver le lieu du point* O *pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est constant.*

(BARBARIN.)

Nous prendrons comme axes de coordonnées deux des côtés du triangle. Soit O un des points du lieu tel que les points A′, B′, C′, obtenus en joignant O aux trois sommets et prolongeant, donnent

$$A'C \times B'A \times C'B = k \quad \text{ou} \quad mnp = k.$$

L'équation de CC′ sera, a, b, c désignant les trois côtés du triangle,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{p} - 1 = 0,$$

celle de AA′,

$$\frac{x}{a-m} + \frac{y}{c} - 1 = 0,$$

et les coordonnées du point O satisfont à ces deux équations.

De ces deux équations on tire

$$p = \frac{ay}{a-x}, \qquad m = -\frac{cx + ay - ac}{c-y}.$$

On a du reste

$$mnp = (a-m)(b-n)(c-p),$$

d'où

$$n = \frac{(a-m)(c-p)b}{mp+(a-m)(c-p)}.$$

Remplaçant m et p par les valeurs trouvées plus haut, on obtient

$$n = \frac{bcx}{cx+ay},$$

et l'équation du lieu est

$$(1) \qquad -\frac{abcxy(cx+ay-ac)}{(a-x)(c-y)(cx+ay)} = k.$$

Le lieu est du troisième degré et présente trois directions asymptotiques, les directions des côtés du triangle.

Le coefficient des termes en x^2, $c(abcy - kc + ky)$, égalé à zéro, donne l'asymptote parallèle à Ox,

$$(2) \qquad y = \frac{kc}{abc+k}.$$

On aura de même, pour l'asymptote parallèle à Oy,

$$(3) \qquad x = \frac{ka}{abc+k}.$$

Par raison de symétrie, nous aurons une troisième asymptote parallèle à AC et son équation sera

$$(4) \qquad x_1 = \frac{kb}{abc+k},$$

en prenant BC pour axe des x_1 et AC pour axe des y_1. On voit de plus que la courbe passe par les trois sommets du triangle et que les tangentes en ces points sont parallèles aux côtés opposés.

Déterminons la forme de la courbe suivant les valeurs de k.

Première Partie : $k > 0$. — Pour un point pris à l'intérieur du triangle,

$$a > x > 0, \quad c > y > 0, \quad cx + ay - ac < 0;$$

donc

$$\frac{abcxy(cx + ay - ac)}{(a - x)(c - y)(cx + ay)} < 0.$$

On peut avoir des points du lieu à l'intérieur. Il est aisé de voir qu'il n'y en aura pas toujours. k peut varier de o à $+\infty$, et le produit des trois segments, quand O est à l'intérieur du triangle, ne peut dépasser un maximum, qui est atteint lorsque O est le centre de gravité du triangle. En effet,

$$mnp(a - m)(b - n)(c - p) = k^2$$

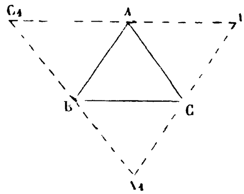
en valeur absolue, et ce produit sera maximum quand les produits deux à deux seront maxima, car ils le sont en même temps pour $m = a - m$, $n = b - n$, $p = c - p$, ce qui donne bien pour O le point de concours des médianes. Dans ce cas, $k = \frac{abc}{8}$. Donc, suivant que k sera inférieur, supérieur ou égal à $\frac{abc}{8}$, on aura les trois dispositions du lieu (1) (2), (3).

Dans le cas particulier de $k = \frac{abc}{8}$, le point de concours des médianes est le seul point du lieu qui soit à l'intérieur du triangle; pour $k > \frac{abc}{8}$, il n'y a plus de points de lieu à l'intérieur.

Si k croît au delà de toute limite, la courbe se réduit à trois droites indéfinies menées par les sommets du triangle parallèlement aux côtés opposés.

Remarque I. — On obtient ainsi tous les points du plan, sauf ceux qui sont compris dans les angles opposés par le sommet à ceux du triangle et ceux des trois

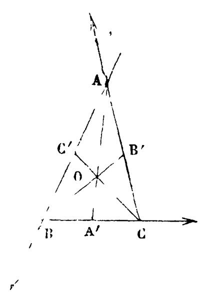
Fig. 1.



triangles AB_1C, CA_1B, BC_1A formés par les côtés du triangle proposé et les parallèles menées par les sommets parallèlement aux côtés opposés.

Seconde Partie : $k < 0$. — On peut se rendre compte du double signe que doit prendre k. Nous compterons

Fig. 2.



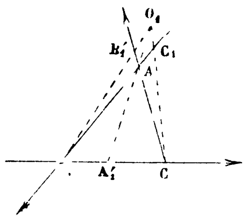
positivement les segments dans le sens des flèches.

Pour un point de l'intérieur du triangle, les trois segments CA', AB', BC' sont négatifs, leur produit est négatif, et, comme (1) donne ce produit changé de signe, dans (1), il faut $k > 0$ pour tout point à l'intérieur du triangle ainsi que pour toutes les régions examinées dans la première Partie.

Prenons au contraire un point O_1 dans une des régions qu'il nous reste à examiner.

On a les trois segments CA'_1, AB'_1, AC'_1, qui sont

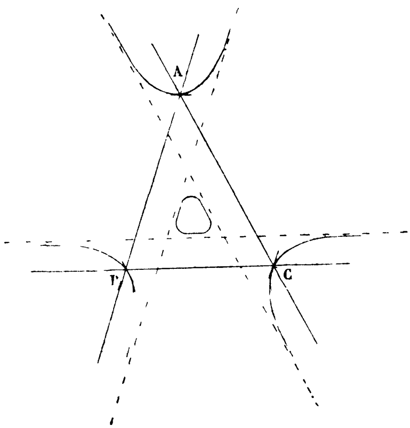
Fig. 3.



affectés des signes —, +, —. Leur produit, changé de signe, sera bien négatif, ce qui exige, dans (1), $k < 0$.

Cette notation du produit est arbitraire; mais, une fois que nous avons fait une hypothèse sur k pour la

Fig. 4.



première Partie, la discussion de la seconde s'en déduit forcément.

Nous supposerons donc $k < 0$ et nous mettrons le signe en évidence.

On aura, pour asymptote parallèle à Ox,

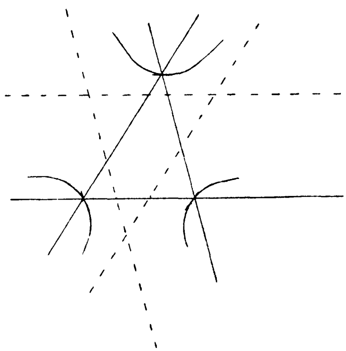
$$y = -\frac{kc}{abc - k}.$$

Les autres se déduisent de celle-là par analogie :

1° Supposons $k < abc$. Le lieu passe toujours par les points A, B, C, et on a la courbe représentée par la *fig.* 4.

2° $k = abc$. Les branches infinies du lieu, ainsi que

Fig. 5.



les asymptotes, se sont éloignées à l'infini dans le sens négatif.

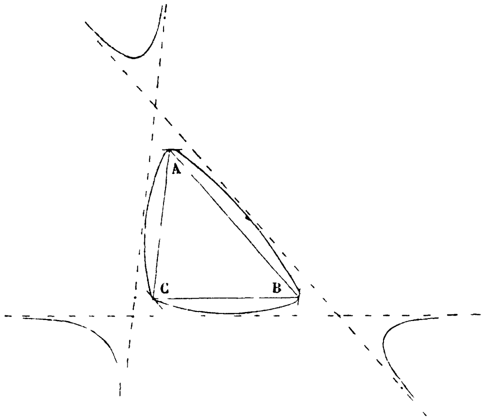
3° $k > abc$. Si $k = abc + \varepsilon$, les asymptotes passent à $+\infty$ relativement à chaque côté, et, lorsque k décroît, elles ser approchent des sommets du triangle parallèlement aux côtés opposés.

Enfin, pour k tendant vers $-\infty$, les asymptotes deviennent les parallèles aux côtés du triangle, menées par les sommets opposés.

C'est le cas limite de la première Partie.

En résumé, pour k croissant de $-\infty$ à $+\infty$, le lieu

Fig. 6.



passe par tous les points du plan une fois, et une fois seulement.

Remarque. — Dans le cas où le lieu a une courbe à branches fermées, cette courbe n'est pas coupée par les asymptotes, car le lieu est du troisième degré et ne peut être rencontré en plus de trois points par une droite quelconque.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Baron, élève du lycée Henri IV; A. de Vauvineux, élève du lycée de Grenoble; E. Pecquery, élève du lycée du Havre; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; L. Fulcrand, boursier à la Faculté des Sciences de Bordeaux; H. Lez et Moret-Blanc.