NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. GRIESS

Solution de la question proposée en 1879, pour l'admission à l'École normale supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 27-35

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__27_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE EN 1879, POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE;

PAR M. J. GRIESS,
Maître répétiteur au lycée d'Alger.

Étant donné un tétraèdre OABC *défini par l'angle trièdre* O *et les longueurs* $4a$, $4b$, $4c$ *des trois arêtes* OA, OB, OC :

1° *Démontrer que l'ellipsoïde qui admet pour diamètres conjugués les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées deux à deux est tangent aux six arêtes du tétraèdre.*

2° *Trouver l'intersection de cet ellipsoïde et de l'hyperboloïde engendré par une droite mobile qui s'appuie sur trois droites menées l'une par le milieu de* OA *parallèlement à* OC, *la seconde par le milieu de* OC *parallèlement à* OB *et la troisième par le milieu de* OB *parallèlement à* OA.

3° *Par chacun des points où la droite mobile perce la surface de l'ellipsoïde, on mène un plan parallèle au plan tangent en l'autre point : démontrer que ces* *deux plans passent par le centre de l'ellipsoïde et trouver le lieu de leur intersection.*

1° Soient S, P, M les milieux des arêtes OA, OB, OC et R, Q, N les milieux des arêtes BC, AC, AB (le lecteur est prié de faire la figure). Considérons l'ellipsoïde qui a pour diamètres conjugués les droites MN, PQ, RS qui se coupent en K; je dis qu'il est tangent, par exemple, à BC. En effet, le plan MPQN contient deux diamètres conjugués de RS; c'est donc son plan diamétral conjugué, et, par suite, le plan tangent en R est parallèle à MPQN. D'ailleurs, MP et QN sont parallèles à BC; BC est donc parallèle au plan diamétral conjugué de RS, et, par suite, elle est contenue dans le plan tangent en R. Donc BC est tangente à l'ellipsoïde. Remarquons que, si l'on cherche la section de cette surface par le plan ABC, ce sera une ellipse tangente aux trois côtés du triangle en leurs milieux.

Formons l'équation de l'ellipsoïde. Les équations des trois plans diamétraux sont :

$$\begin{array}{ll} \text{MNPQ}\ldots & cy + bz - 2bc = 0, \\ \text{PQRS}\ldots & bx + ay - 2ab = 0, \\ \text{MRSN}\ldots & cx + az - 2ac = 0. \end{array}$$

L'équation de l'ellipsoïde sera donc de la forme

$$\frac{(cy - bz - 2bc)^2}{\alpha^2} + \frac{(cx + az - 2ac)^2}{\beta^2} + \frac{(bx + ay - 2ab)^2}{\gamma^2} = 1.$$

Exprimons que cette surface passe par M, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2c$, il vient

$$4a^2b^2 = \gamma^2,$$

on aurait de même

$$4b^2c^2 = \alpha^2, \quad 4a^2c^2 = \beta^2,$$

de sorte que l'équation devient

$$\frac{(cy - bz - 2bc)^2}{4b^2c^2} + \frac{(cx + az - 2ac)^2}{4a^2c^2} + \frac{(bx + ay - 2ab)^2}{4a^2b^2} = 1.$$

Remarquons qu'elle admet pour centre le point (a, b, c); transportons l'origine en ce point : l'équation devient

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 4$$

ou bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} = 2.$$

2° Menons les trois droites MR, PN, QS qui doivent être les trois directrices de l'hyperboloïde. Je remarque que la droite MQ qui rencontre MR et QS est parallèle à PN; c'est donc une génératrice du second système. Il en est de même des droites NS et PR. Remarquons que les plans tangents en M et N, P et Q, R et S sont, par conséquent, parallèles deux à deux; l'hyperboloïde a donc le même centre que l'ellipsoïde.

Cherchons la section de cet hyperboloïde par le plan ABC; elle contiendra les trois points R, Q, N. La tangente en Q est l'intersection du plan tangent en ce point avec la face ABC. Or ce plan tangent est le plan des droites MQ et QS, c'est-à-dire la face OAC. La tangente est donc AC. On verrait de même que les tangentes en R et N sont les droites BC et AB. Donc la section est l'ellipse inscrite dans ABC et tangente aux milieux des côtés.

Si l'on rapproche ce résultat de celui qu'on a obtenu pour l'ellipsoïde, on voit que les deux surfaces ont cette ellipse en commun, et par suite se pénètrent suivant deux courbes planes. La seconde est une ellipse égale à la première et symétrique par rapport au centre K. Elle est circonscrite au triangle MPS.

Cherchons l'équation de l'hyperboloïde. Un plan passant par MR aura pour équation

$$z - 2c + \lambda x = 0;$$

un plan passant par QS,

$$x - 2a + \lambda_1 y = 0.$$

Exprimons que la droite définie par ces deux équations rencontre PN,

$$z = 0, \quad y = 2b,$$

on trouve

$$a\lambda - b\lambda\lambda_1 - c = 0.$$

D'ailleurs,

$$\lambda = \frac{2c - z}{x}, \quad \lambda_1 = \frac{2a - x}{y};$$

on a donc

$$a\frac{2c - z}{x} - b\frac{2c - z}{x}\frac{2a - x}{y} - c = 0.$$

Transportons l'origine au centre a, b, c :

$$a(y + b)(c - z) - b(c - z)(a - x) - c(x + a)(y + b) = 0.$$

Effectuant et divisant par abc, il vient

$$\frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + 1 = 0.$$

Ajoutons cette équation à celle de l'ellipsoïde; il vient

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

ou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \pm 1.$$

L'intersection se compose donc bien de deux courbes planes symétriques par rapport à l'origine. Pour démontrer que ce sont les ellipses circonscrites à MPS et RQN, menons, par K, IH parallèle à OC, rencontrant en I la face ABC et en H la face OAB; on a

$$IK = \frac{IH}{2} = \frac{QS}{2} = \frac{OC}{4} = c.$$

On aurait de même, sur des parallèles menées par K aux deux autres axes, les longueurs a et b. L'équation du plan ABC ou RQN est donc

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

3° Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ les coordonnées des points de rencontre de l'une des génératrices de l'hyperboloïde avec l'ellipsoïde. Le plan mené par le premier point parallèlement au plan tangent au second a pour équation

$$(x - x_1)f'_{x_2} + (y - y_1)f'_{y_2} + (z - z_1)f'_{z_2} = 0.$$

La condition pour que ce plan passe par le centre est, en prenant les équations rapportées à K comme origine,

$$x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} = 0$$

ou, en remplaçant les dérivées par leurs valeurs (f désignant le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde),

$$\frac{x_1}{a}\left(\frac{2x_2}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{z_2}{c}\right) + \frac{y_1}{b}\left(\frac{2y_2}{b} + \frac{x_2}{a} + \frac{z_2}{c}\right) + \frac{z_1}{c}\left(\frac{2z_2}{c} + \frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b}\right) = 0.$$

Remarquons que les deux points considérés appartiennent à l'intersection des deux surfaces et sont situés l'un dans le plan RQN, l'autre dans le plan PMS. On a donc

$$(1) \qquad \frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{z_2}{c} = -1.$$

En tenant compte de ces relations, la condition ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{x_1}{a}\left(\frac{x_2}{a} - 1\right) + \frac{y_1}{b}\left(\frac{y_2}{b} - 1\right) + \frac{z_1}{c}\left(\frac{z_2}{c} - 1\right) = 0.$$

$$(3) \qquad \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 1.$$

Exprimons maintenant que les deux points considérés sont sur une même génératrice de l'hyperboloïde. Pour cela, il suffira d'exprimer que le point (x_2, y_2, z_2) est dans le plan tangent à l'hyperboloïde au point (x_1, y_1, z_1). Ce dernier a pour équation

$$\frac{x}{a}\left(\frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c}\right) + \frac{y}{b}\left(\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}\right) + \frac{z}{c}\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) - 2 = 0,$$

et la condition demandée sera

$$(4) \quad \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{ab} + \frac{x_2 z_1 + z_2 x_1}{ac} + \frac{y_2 z_1 + z_2 y_1}{bc} + 2 = 0.$$

Faisons maintenant le produit des équations (1) et (2),

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} + \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{ab} + \frac{x_2 z_1 + x_1 z_2}{ac} + \frac{y_2 z_1 + y_1 z_2}{bc} = -1.$$

Tenant compte de (4), cette relation s'écrit

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 1.$$

On retrouve la condition (3). Comme celle-ci n'est qu'une transformation de la relation

$$x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} = 0,$$

cette dernière est elle-même vérifiée. D'ailleurs, on aura aussi, par symétrie,

$$x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} = 0.$$

Donc le second plan passe aussi par le centre.

L'intersection de ces deux plans a donc pour lieu un cône dont le sommet est au centre. Je dis que ce cône est du second degré. En effet, si nous considérons l'intersection des plans tangents en (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2), cette intersection est la conjuguée de la génératrice qui passe par ces deux points, par rapport à l'ellipsoïde. Donc elle s'appuie constamment sur trois droites fixes qui sont les conjuguées des directrices du premier hyperboloïde, et, par conséquent, le lieu de cette droite est aussi un hyperboloïde, ayant le même centre que le premier. Le lieu cherché n'est autre chose que le cône asymptote de cet hyperboloïde.

Pour trouver son équation, prenons d'abord les équations des conjuguées des directrices primitives. Pour cela, il suffit de chercher les plans tangents aux extrémités de MR, de PN, de QS :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0, \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 4, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 4, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 4. \end{cases}$$

Une droite s'appuyant sur (1) et (3) a pour équations

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 4 + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0,$$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4\right) = 0.$$

Pour exprimer que cette droite rencontre la droite (2), retranchons ses équations l'une de l'autre :

$$4 + \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4\right) = 0.$$

Tenant compte de (2),

$$4 - 4\lambda - 4\mu = 0,$$

$$1 - \lambda - \mu = 0.$$

Éliminant λ et μ,

$$1 - \frac{\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 4}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} - \frac{\frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4} = 0$$

ou

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4\right) - \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 4\right)$$
$$- \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Transportons l'origine au point (a, b, c) et effectuons ; il vient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{3xz}{ac} + \frac{3yz}{bc} + \frac{3xy}{ab} + 4 = 0.$$

L'équation du cône est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{3xz}{ac} + \frac{3yz}{bc} + \frac{3xy}{ab} = 0.$$

Il passe par l'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde, car, si l'on retranche de son équation celle de l'ellipsoïde, on trouve, en divisant par 2,

$$\frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

C'est l'équation de l'hyperboloïde.

Note. — MM. F. Lebreton et L. Mandrillon, élèves du lycée de Besançon (classe de M. Crétin), ont envoyé deux excellentes solutions, l'une analytique et l'autre géométrique. M. E. Estienne, élève du lycée de Bar-le-Duc, envoie aussi une très bonne solution géométrique, et M. A. Leinekugel une solution analytique.