

S.-F.-W. BAEHR

Note sur une enveloppe

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 250-252

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__250_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

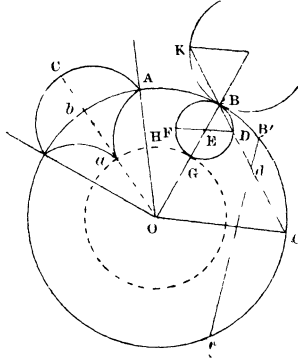
NOTE SUR UNE ENVELOPPE ;

PAR M. S.-F.-W. BAEHR,

Professeur à l'École polytechnique de Delft.

On suppose les deux aiguilles d'une montre de longueurs égales, et l'on demande l'enveloppe de la droite qui passe par leurs extrémités. Soient OA le rayon du cadran qui correspond avec midi et, à un moment quelconque, OB la direction de l'aiguille des heures; on aura, en faisant l'angle BOC égal à onze fois l'angle AOB , la direction correspondante de l'aiguille des minutes OC , et BC sera une position de l'enveloppée. Pour déterminer le point D où elle touche son enveloppe, faisons CC' égal à douze fois BB' ; alors $B'C'$ sera une autre posi-

tion de l'enveloppée, et les triangles semblables BdB' et CdC' donnent $dB' : dC = \text{corde } BB' : \text{corde } BB'$, en sorte que, lorsqu'on fait tendre B' vers B , on aura à la limite $DB = \frac{1}{12} DC$ ou $BD = \frac{1}{13} BC$. Menant des paral-



lèles à CO , on aura aussi $BE = ED = \frac{1}{13} BO$, et le cercle décrit du centre E avec le rayon EB passera par D et sera tangent au cercle décrit du centre O du cadran avec le rayon $OG = \frac{11}{13} OB$. L'angle FEG , égal à l'angle BOC , étant onze fois l'angle HOG , tandis que le rayon EG est $\frac{1}{11}$ du rayon OG , l'arc de cercle FG aura la même longueur que l'arc GH . Donc le point F est un point de l'épicycloïde décrite par le point de contact H quand le cercle EG , en partant de la position où il touche le cercle OH en H , roule sur ce cercle directeur OH , et, par conséquent, le point diamétralement opposé D est un point de l'épicycloïde égale que décrit alors le point A du cercle mobile; celle-ci est donc l'enveloppe cherchée.

Si l'on divise le cadran, à partir du point de midi A ,

en onze parties égales, ce qui donne les points où les aiguilles se superposent, l'enveloppe sera tangente au cercle du cadran en ces points, tandis qu'elle aura des points de rebroussement sur les rayons qui passent par les milieux des arcs de cette division, et qui sont les points où les aiguilles viennent en ligne droite, en sorte qu'alors les tangentes à l'enveloppe passent par le centre du cadran. La même courbe est l'enveloppe de la droite qui passe par les extrémités des prolongements, jusqu'au cercle du cadran, des aiguilles, et, si on la fait tourner autour du centre jusqu'à ce que les points de rebroussements viennent sur les rayons où les aiguilles se superposent, elle sera l'enveloppe de la droite qui passe par l'extrémité de l'une des aiguilles et l'extrémité du prolongement de l'autre.

Si, sur le prolongement de OB, on prend $BI = \frac{1}{11} OB$, le cercle décrit du point I' avec le rayon BI sera coupé par le prolongement de CB en un point K, tellement que l'angle KIB est égal à l'angle BOC, ou onze fois l'angle AOB, en sorte que l'arc de cercle BK aura la même longueur que l'arc BA. Ce point K est donc un point de l'épicycloïde décrite par le point de contact A quand le cercle IB, en partant de la position où il touche le cercle OA en A, roule sur ce cercle directeur, et, le point B étant le centre instantané de rotation, KB est normale à cette courbe. Ainsi les normales à l'épicycloïde sont tangentes à l'enveloppe; celle-ci est donc la développée de l'épicycloïde extérieure au cercle du cadran, et sa longueur sera égale à $22 \times \left(\frac{2}{13} + \frac{2}{11} \right)$, ou $7 \frac{5}{13}$ fois le rayon du cadran.
