Nouvelles annales de mathématiques

E. Fauquembergue

Problème de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 231-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__231_1>

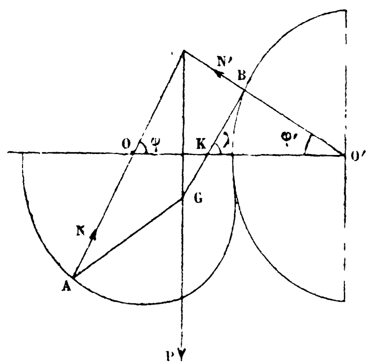
PROBLÈME DE MÉCANIQUE ;

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Une tige rigide pesante s'appuie, par ses extrémités, sur deux hémisphères creux, tangents extérieurement, et tels que l'un des grands cercles de base soit horizontal et l'autre vertical : trouver la position d'équilibre de la tige ; discuter le problème.

(*Nouv. Corresp. math.*)

Soient N et N′ les réactions qui s'exercent en A et B, et soit P le poids de la tige, appliqué en son milieu G. Il faut, pour l'équilibre, que ces trois forces soient dans un même plan et concourent en un point I. Ce plan doit



être vertical, puisqu'il contient GP qui est vertical; de plus, comme les forces N et N′ doivent être normales aux deux sphères (le frottement étant négligé), elles doivent passer par les centres O et O′. Le plan des trois forces est donc un plan méridien vertical; nous supposerons que ce soit le plan de la figure.

1° Désignons par R le rayon des deux sphères, l la longueur de la tige, φ, φ' et λ les angles IOO′, IO′O et l'angle que fait la tige avec OO′. Écrivons que la projection de AB sur une droite perpendiculaire à OO′ est égale à la somme des projections des deux rayons AO, BO′ sur la même droite, et que OO′ est égale à la somme algébrique des projections sur OO′ des trois droites AO, AB, BO′; nous aurons les équations

$$l \sin\lambda = R\sin\varphi + R\sin\varphi',$$
$$2R = l\cos\lambda - R\cos\varphi + R\cos\varphi'.$$

ou, en posant $\frac{l}{R} = K$,

(1) $$\sin\varphi + \sin\varphi' = K\sin\lambda,$$

(2) $$\cos\varphi' - \cos\varphi = 2 - K\cos\lambda.$$

D'autre part, la droite IG étant une médiane du triangle AIB, on a, d'après une formule connue,

$$\cot IGB = \frac{\cot IAG - \cot IBG}{2}$$

ou

(3) $$2\tang\lambda = \cot(\varphi - \lambda) - \cot(\varphi' + \lambda).$$

2° Après quelques transformations, la dernière équation devient

$$2\tang\lambda = \tang\varphi - \tang\varphi' = \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos\varphi\cos\varphi'},$$

$$2\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2}\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \tang\lambda\left[\cos(\varphi - \varphi') + \cos(\varphi + \varphi')\right]$$

ou

(4) $$\left\{\begin{array}{l} 2\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2}\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} - \tang\lambda\left[\cos^2\frac{\varphi - \varphi'}{2} - \sin^2\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right] \\ \quad = \tang\lambda\cos(\varphi + \varphi'). \end{array}\right.$$

Or les équations (1) et (2), divisées membre à membre, donnent

$$\tang\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{2 - K\cos\lambda}{K\sin\lambda},$$

d'où

$$\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{2 - K\cos\lambda}{\sqrt{4 - 4K\cos\lambda + K^2}},$$

$$\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{K\sin\lambda}{\sqrt{4 - 4K\cos\lambda + K^2}}.$$

Ces mêmes équations, étant ajoutées, après avoir été elevées au carré, donnent aussi

$$\cos(\varphi + \varphi') = 2K\cos\lambda - \frac{K^2}{2} - 1.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), on arrive à la suivante

$$(5)\qquad [4\,\text{K}\cos\lambda - (\text{K}^2 + 3)]^2 = 2\,\text{K}^2 - 7,$$

d'où

$$\cos\lambda = \frac{\text{K}^2 + 3 \pm \sqrt{2\,\text{K}^2 - 7}}{4\,\text{K}}.$$

Discussion. — Les deux racines sont toujours positives; elles seront réelles si l'on a

$$(6)\qquad \text{K} > \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Pour qu'elles soient admissibles, il faut qu'elles soient plus petites que 1. Écrivons que le résultat de la substitution de 1 à cos λ, dans l'équation (5), est positif et que la somme des racines est plus petite que 2, nous obtiendrons les deux inégalités

$$(7)\qquad \text{K}^4 - 8\,\text{K}^3 + 20\,\text{K}^2 - 24\,\text{K} + 16 > 0,$$
$$(8)\qquad \text{K}^2 - 4\,\text{K} + 3 < 0,$$

qui expriment que les deux racines sont toutes deux < 1. Si le premier membre de l'inégalité (7) était négatif, une seule racine (celle obtenue en prenant le radical avec le signe —), serait plus petite que 1.

Cette inégalité peut d'abord s'écrire

$$(\text{K} - 2)(\text{K}^3 - 6\,\text{K}^2 + 8\,\text{K} - 8) > 0.$$

Égalant à zéro le polynôme de la seconde parenthèse, on obtient l'équation

$$\text{K}^3 - 6\,\text{K}^2 + 8\,\text{K} - 8 = 0,$$

qui a une seule racine réelle égale à 4,7, à 0,1 près par excès.

Par suite, l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(K - 2)[K - (4,7 - \alpha)] > 0,$$

α étant une quantité plus petite que 0, 1.

En y joignant l'inégalité (8), écrite sous la forme

$$(K - 1)(K - 3) < 0,$$

la discussion du problème est alors facile et peut se résumer dans le tableau suivant :

Variation de $K = \frac{l}{R}$.	Nombre de solutions.
$K < \sqrt{\frac{7}{2}}$	0
$K = \sqrt{\frac{7}{2}}$	1
$\sqrt{\frac{7}{2}} < K \leq 2$	2
$2 < K \leq 4,7 - \alpha$	1
$K > 4,7 - \alpha$	0