J. GRIESS

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours général de 1879

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 20-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__20_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879;

PAR M. J. GRIESS,
Maître répétiteur au lycée d'Alger.

On donne un hyperboloïde. Par un point P *pris dans le plan de l'ellipse de gorge on mène une parallèle à une génératrice quelconque, et l'on considère le cylindre de révolution qui aurait pour axe cette parallèle et passerait par la génératrice. Ce cylindre coupe l'hyperboloïde suivant une courbe qui se projette sur le plan horizontal suivant une courbe du troisième degré. Cette courbe du troisième degré possède un point double dont on demande le lieu.*

Soient α, β les coordonnées du point P par rapport au centre de l'hyperboloïde. L'équation de l'hyperboloïde étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1,$$

les équations d'une génératrice quelconque sont

$$\text{G}\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sin\varphi - \frac{z}{c}\cos\varphi,\\ \frac{y}{b} &= \cos\varphi + \frac{z}{c}\sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

Prenons le point P pour origine; ces équations deviennent

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

$$\frac{x+\alpha}{a}=\sin\varphi-\frac{z}{c}\cos\varphi,$$

$$\frac{y+\beta}{b}=\cos\varphi+\frac{z}{c}\sin\varphi,$$

Les équations d'une parallèle menée par P sont

$$\frac{x}{a}=-\frac{z}{c}\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\varphi.$$

ou

$$\frac{x}{-a\cos\varphi}=\frac{y}{b\sin\varphi}=\frac{z}{c}.$$

Pour former l'équation du cylindre, prenons une sphère dont le centre est l'origine

$$x^2+y^2+z^2-\rho^2=0,$$

et écrivons l'équation du cylindre circonscrit suivant le plan diamétral perpendiculaire à la génératrice. L'équation de ce plan est

$$-ax\cos\varphi+by\sin\varphi+cz=0,$$

et celle du cylindre sera

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2)(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2)$$
$$- (ax \cos\varphi - by \sin\varphi - cz)^2 = 0.$$

Le rayon ρ de cette sphère sera la distance du point P à la génératrice de l'hyperboloïde. Or, la distance d'un point (x, y, z) à la droite

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

est donnée par la formule

$$\frac{(x - az - p)^2 + (y - bz - q)^2 + [b(x - p) - a(y - q)]^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Comme P est l'origine, cette formule se réduit à

$$\frac{p^2 + q^2 + (bp - aq)^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

En mettant les équations de G sous la forme

$$x = a \sin\varphi - \alpha - \frac{a}{c} \cos\varphi \,.\, z,$$

$$y = b \cos\varphi - \beta + \frac{b}{c} \sin\varphi \,.\, z,$$

l'expression de ρ^2 sera donc

$$\rho^2 = \frac{(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta)^2 + \left[\frac{b}{c} \sin\varphi (a \sin\varphi - \alpha) - \frac{a}{c} \cos\varphi (b \cos\varphi - \beta)\right]^2}{\frac{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}{c^2} + 1}$$

$$= \frac{c^2[(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta)^2] + [b \sin\varphi (a \sin\varphi - \alpha) - a \cos\varphi (b \cos\varphi - \beta)]^2}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2}$$

$$= \frac{c^2[(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta)^2] + (ab - b\alpha \sin\varphi - a\beta \cos\varphi)^2}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2}.$$

Le point double étant la projection de deux points de la courbe situés sur la même verticale, il est clair que le milieu de cette corde appartiendra aux deux plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans les deux surfaces. Dans l'hyperboloïde, ce plan diamétral est le plan de l'ellipse de gorge. Dans le cylindre, il sera donné par l'équation $f'_z = 0$. Il est clair que dans le cas actuel l'intersection des deux plans, étant située dans le plan de projection, ira passer par le point double.

On a

$$f'_z = z(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2) \\ + 2c(ax \cos\varphi - by \sin\varphi - cz) = 0.$$

En faisant dans cette équation $z = 0$, on aura la droite cherchée : c'est

$$ax \cos\varphi = by \sin\varphi.$$

On voit qu'elle est perpendiculaire à la projection de la génératrice donnée.

Concevons maintenant qu'en tous les points de cette droite nous élevions des perpendiculaires ; quand nous arriverons au point double, la perpendiculaire correspondante rencontrera les deux surfaces en deux points communs, situés d'ailleurs symétriquement par rapport au plan des xy. Les équations aux z des points d'intersection de cette perpendiculaire avec les deux surface devront donc avoir les mêmes racines. C'est en écrivant cette condition que nous aurons le lieu.

Une perpendiculaire au plan des xy en un point de la droite

$$\frac{x}{b \sin\varphi} = \frac{y}{a \cos\varphi}$$

a pour équations

$$\frac{x}{b \sin\varphi} = \frac{y}{a \cos\varphi} = \lambda,$$

λ variant à mesure que le point se déplace sur la droite. On tire de là

$$x = b\lambda \sin\varphi, \quad y = a\lambda \cos\varphi.$$

Remplaçant x et y par ces valeurs, l'équation de l'hyperboloïde devient

$$z^2 = c^2\left[\frac{(b\lambda \sin\varphi + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(a\lambda \cos\varphi + \beta)^2}{b^2} - 1\right].$$

Portant ces mêmes valeurs dans l'équation du cylindre, il vient

$$\begin{aligned}&(b^2\lambda^2 \sin^2\varphi + a^2\lambda^2 \cos^2\varphi + z^2 - \rho^2)\\ &\quad\times(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2)\\ &\quad-(ab\lambda \sin\varphi \cos\varphi - ab\lambda \sin\varphi \cos\varphi - cz)^2 = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&z^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)\\ &\quad= \rho^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2)\\ &\qquad-\lambda^2(b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi)(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}&\rho^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2)\\ &\quad= c^2[(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta^2]\\ &\qquad+(b\alpha \sin\varphi + a\beta \cos\varphi - ab)^2.\end{aligned}$$

Remplaçant et écrivant que les deux valeurs de z^2 sont égales, il vient

$$\begin{aligned}&c^2\left[\frac{(b\lambda \sin\varphi + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(a\lambda \cos\varphi + \beta)^2}{b^2} - 1\right]\\ &= \frac{c^2[(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta)^2] + (a\beta \cos\varphi + b\alpha \sin\varphi - ab)^2}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\\ &\quad-\lambda^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2).\end{aligned}$$

Cette équation est du deuxième degré en λ. Il semble donc que sur chaque droite d'intersection des plans diamétraux il y ait deux points doubles, ce qui est impossible dans une courbe du troisième degré.

Or, considérons le point A, projection du point P sur la projection horizontale G′ de la génératrice. Si en ce point j'élève une perpendiculaire, cette perpendiculaire rencontre la génératrice G et sa symétrique en deux points qui sont aussi situés sur le cylindre. Donc une des valeurs de λ correspond au point A et l'autre correspond au point double. Nous pouvons trouver la valeur de λ relative au point A. Ce point est, en effet, défini par les équations

$$\frac{x}{b \sin\varphi} = \frac{y}{a \cos\varphi},$$

$$\frac{(x+\alpha)\sin\varphi}{a} + \frac{(y+\beta)\cos\varphi}{b} = 1.$$

En écrivant que le point d'intersection de ces deux droites satisfait aux équations

$$\frac{x}{b \sin\varphi} = \frac{y}{a \cos\varphi} = \lambda,$$

nous aurons la valeur de λ. En éliminant x et y entre ces deux dernières et la seconde des premières, on a

$$\frac{(b\lambda \sin\varphi + \alpha)\sin\varphi}{a} + \frac{(a\lambda \cos\varphi + \beta)\cos\varphi}{b} = 1,$$

$$\lambda(b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi) = ab - b\alpha \sin\varphi - a\beta \cos\varphi,$$

$$\lambda = \frac{ab - b\alpha \sin\varphi - a\beta \cos\varphi}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}.$$

Si donc nous retranchons cette valeur de la somme $\lambda' + \lambda''$ fournie par l'équation du second degré, il nous restera la valeur de λ relative au point double. Cette équation du second degré s'écrit

$$\frac{\lambda^2}{a^2b^2}(a^4b^2 \cos^2\varphi + b^4a^2 \sin^2\varphi + b^4c^2 \sin^2\varphi + a^4c^2 \cos^2\varphi + a^2b^2c^2)$$
$$+ 2\lambda c^2\left(\frac{b\alpha \sin\varphi}{a^2} + \frac{a\beta \cos\varphi}{b^2}\right) + \ldots.$$

La valeur cherchée est donc

$$\lambda = -\frac{2c^2(b^3\alpha \sin\varphi + a^3\beta \cos\varphi)}{a^2b^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi) + c^2(a^4 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + a^2b^2)}$$
$$- \frac{ab - b\alpha \sin\varphi - a\beta \cos\varphi}{b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}.$$

Il suffit maintenant, pour trouver l'équation du lieu, d'éliminer λ et φ entre cette équation et les équations

$$\frac{x}{b\sin\varphi} = \frac{y}{a\cos\varphi} = \lambda.$$

On tire de ces dernières

$$\frac{\frac{x}{b}}{\sin\varphi} = \frac{\frac{y}{a}}{\cos\varphi} = \lambda = \sqrt{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}} - \frac{1}{ab}\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

En posant

$$\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = k,$$

on a

$$\lambda = \frac{k}{ab}, \quad \sin\varphi = \frac{ax}{k}, \quad \cos\varphi = \frac{by}{k}.$$

En substituant dans la valeur de λ, il vient

$$\frac{k}{ab} + \frac{2c^2\left(b^3\alpha\frac{ax}{k} + a^3\beta\frac{by}{k}\right)}{\frac{a^4b^4}{k^2}(x^2+y^2) + c^2\frac{a^2b^2}{k^2}(b^2x^2 + a^2y^2) + a^2b^2c^2} + \frac{ab - b\alpha\frac{ax}{k} - a\beta\frac{by}{k}}{\frac{a^2b^2}{k^2}(x^2+y^2)} = 0.$$

Multiplions par $\frac{ab}{k}$ et divisons haut et bas par ab,

$$1 + \frac{2c^2(b^2\alpha x + a^2\beta y)}{a^2b^2(x^2+y^2) + c^2(b^2x^2 + a^2y^2) + c^2k^2} + \frac{k - \alpha x - \beta y}{x^2+y^2} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)(x^2+y^2) + 2c^2(b^2\alpha x + a^2\beta y)\\ -(\alpha x + \beta y)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\\ +(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)k = 0.\end{aligned}$$

Faisons passer k dans le second membre, élevons au carré et divisons par $(a^2 b^2 c^2)^2$; il vient

$$\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)(x^2+y^2)-\alpha x\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)-\beta y\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]^2$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2(a^2x^2+b^2y^2).$$

C'est une courbe du quatrième degré possédant un point double à l'origine.

Note. — La même question a été résolue par M. A. Leinekugel.