Nouvelles annales de mathématiques

Candèze

Remarques sur le théorème de Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 193-196

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__193_0>

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE STURM;

PAR M. CANDÈZE,
Élève de l'École Polytechnique.

Considérons une équation entière et formons pour cette équation les fonctions de Sturm, que nous désignerons par $V, V_1, \ldots, V_n$.

On aura

$$(1) \qquad V = V_1 Q_1 - V_2,$$

$$(2) \qquad V_1 = V_2 Q_2 - V_3,$$

$$(3) \qquad V_2 = V_3 Q_3 - V_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1) \qquad V_{(n-2)} = V_{(n-1)} Q_{(n-1)} - V_n.$$

Nous supposerons que V_n est une constante, c'est-à-dire que V et V_1 sont premiers entre eux.

Remarquons que, lorsque $V = 0$, $V_1 Q_1 = V_2$, c'est-à-dire que $Q_1 V_2$ a le signe de V_1. Le polynôme $Q_1 V_2$ jouit donc, relativement au polynôme V, des propriétés de V', sur lesquelles est fondé le théorème de Rolle, c'est-à-dire qu'entre deux racines réelles de V se trouve au moins une racine de $V_2 Q_1$. Cette remarque, en particulier, nous donne un moyen de séparer les racines d'une équation du troisième degré par des nombres commensurables. En effet, Q_1 et V_2 sont tous les deux du premier degré, et leurs racines séparent les trois racines du polynôme considéré (si le polynôme a ses trois racines réelles).

Cela posé, supposons que $V = 0$ pour une certaine valeur de x; on a

$$(1') \qquad V_1 Q_1 = V_2.$$

Portons dans la seconde équation la valeur de V_2 : on aura

$$(2') \qquad V_1(1 - Q_1 Q_2) = - V_3,$$

ce qui nous montre que $V_3(Q_1 Q_2 - 1)$ jouit encore des mêmes propriétés que V_1.

Tirons V_3 de (2′), et portons sa valeur, ainsi que celle de V_2, dans l'équation (3) ; elle deviendra

$$(3') \qquad V_1 Q_1 = V_1(Q_1 Q_2 - 1) Q_3 - V_4,$$

c'est-à-dire

$$V_1[(Q_1 Q_2 - 1) Q_3 - Q_1] = V_4.$$

Nous continuerons de même jusqu'à la dernière équation.

Or remarquons que les facteurs successifs de V_1 dans les diverses équations que nous obtenons ainsi ne sont autres que les numérateurs des réduites successives de la fraction continue

$$Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cfrac{1}{Q_3 \ldots}}$$

On le vérifie facilement pour les premières réduites, et l'on en déduit sans peine la loi générale.

Je dis que les numérateurs de ces réduites jouissent des mêmes propriétés que les fonctions de Sturm.

1° Deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler en même temps, car pour cela deux fonctions consécutives de Sturm devraient s'annuler.

2° Lorsqu'une fonction s'annule, les deux fonctions qui la comprennent sont de signes contraires.

En effet, les numérateurs de trois réduites consécutives de la fraction continue sont, comme on le verrait facilement, liés par la relation

$$P_{(r-1)} = P_r Q_r - P_{(r+1)}.$$

3° Considérons d'abord la fraction continue comme ayant pour dernier quotient Q_{n-1}. Si l'on désigne par $P_{(n-1)}$ le numérateur de la réduite correspondante, on a

$$V_1 P_{(n-1)} = V_n$$

lorsque $V = 0$.

V_n est positif ou négatif. S'il est positif, la suite

$$V, \quad P_{(n-1)}, \quad P_{(n-2)}, \quad \ldots, \quad P_2, \quad P_1, \quad 1,$$

P_1 n'étant autre que Q_1, P_2 que $Q_1 Q_2 - 1$, ..., jouit des mêmes propriétés que la suite de Sturm, puisque le dernier terme est une constante et que $P_{(n-1)}$ jouit des mêmes propriétés que V_1.

Si V_n est négatif, ce sera la suite

$$V, \quad -P_{(n-1)}, \quad -P_{(n-2)}, \quad \ldots, \quad -P_1, \quad -1$$

qu'il faudra conserver.

Dès lors, il suffira de substituer x dans Q_1, Q_2, ... et de former les réduites successives, ou, pour mieux dire, leurs numérateurs. On pourra se dispenser, d'ailleurs, de substituer directement dans V la valeur de x. En effet, remarquons que

$$\frac{V}{V_1} = Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cdots - \cfrac{1}{Q_{n-1} - \cfrac{1}{\cfrac{V_{n-1}}{V_n}}}}.$$

Alors $\frac{V}{V_1}$ sera la dernière réduite de cette fraction continue; V sera donc, au signe près, identiquement égal au numérateur. On déterminera ce signe une fois pour toutes, et l'on aura alors une suite dans laquelle les substitutions seront plus aisées que dans les fonctions de Sturm.

Q_1, Q_2, ... sont des fonctions dont les coefficients ne sont pas en général entiers, ceux de V étant supposés entiers; dans les opérations successives que l'on fait, on rend les coefficients entiers en multipliant par des nombres convenables et toujours affectés du signe $+$.

On devra alors modifier la fraction continue.

Supposons que l'on ait multiplié la première identité $V = V_1 Q_1 - V_2$ par α :

$$\alpha V = \alpha V_1 Q_1 - \alpha V_2 = V_1 Q'_1 - V'_2.$$

Continuons l'opération :

$$V_1 = V'_2 Q_2 - V_3.$$

Supposons qu'il faille multiplier encore par β :

$$\beta V_1 = V'_2 Q'_2 - V'_3.$$

On a

$$\frac{\alpha V}{V_1} = Q'_1 - \frac{1}{\dfrac{V_1}{V'_2}} = Q'_1 - \frac{\beta}{\dfrac{\beta V_1}{V'_2}} = Q'_1 - \cfrac{\beta}{Q'_2 - \cfrac{1}{\cfrac{V'_2}{V'_3}}}.$$

On continuerait ainsi, et l'on voit que l'on obtient une fraction continue où toutes les fonctions auront leurs coefficients entiers et dont les réduites jouiront encore des propriétés démontrées plus haut.

Nous donnons ci-dessous un calcul des fonctions pour l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0;$$

on a

$$\frac{3x^3 - 18x^2 + 33x - 18}{3x^2 - 12x + 11} = x - 2 - \cfrac{2}{3x - 6 - \cfrac{1}{x - 2}}.$$