Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 173-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__173_1>

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Voulez-vous bien me permettre de vous adresser quelques observations relativement aux questions 1324 et 1296 et aux solutions qui en ont été données dans le dernier numéro d'octobre. Je dirai tout d'abord qu'en proposant la question 1324 je demandais une démonstration et non une vérification, qui n'offrait aucune difficulté : la question reste donc toujours proposée.

Quant à la question 1296, il est certain que M. Realis, en la proposant, a voulu offrir un exercice de vérification aux jeunes lecteurs des *Annales*, car il sait aussi bien que personne que les formules qu'il donne sont un cas particulier des formules générales de Cauchy démontrées dans le quatrième cahier des *Exercices mathématiques*. Il est curieux que l'auteur de la vérification arrive, sans y faire attention, à des formules plus simples que celles de Cauchy, les formules (2) (2e série, t. XIX, p. 458), qui, après la suppression du facteur commun λPQR, sont précisément les formules (51) de mon Mémoire (p. 408; 1879). L'identité (3) (p. 459) se trouve aussi dans le Mémoire cité (p. 407 : 1879). Elle est remarquable en ce qu'elle donne la solution d'une question que j'ai proposée autrefois dans les *Nouvelles Annales* : *Trouver six nombres entiers* x, y, z, x', y', z' *tels que ces nombres satisfassent à l'un ou l'autre des deux sys-*

tèmes

$$x^3 + y^3 + z^3 = x'^3 + y'^3 + z'^3, \qquad xyz = x'y'z';$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = x'^3 + y'^3 + z'^3, \qquad x + y + z = x' + y' + z'.$$

Lors de la dernière réunion à Reims de l'Association pour l'avancement des Sciences, j'ai communiqué les formules (51) à M. Sylvester, qui m'a dit les avoir trouvées de son côté, mais étendues au cas plus général de l'équation

$$(1) \qquad aX^3 + bY^3 + dXYZ = cZ^3.$$

Voici en quelques mots une démonstration très-simple :

(x, y, z), (x', y', z') étant deux solutions de l'équation (1), les formules de Cauchy donnent

$$(2) \quad \begin{cases} X = 3byy'(xy' - yx') - 3czz'(xz' - zx') \\ \qquad + d(x^2y'z' - x'^2yz), \\ Y = 3axx'(yx' - xy') - 3czz'(yz' - zy') \\ \qquad + d(y^2x'z' - y'^2xz), \\ Z = 3axx'(zx' - xz') + 3byy'(zy' - yz') \\ \qquad + d(z^2y'x' - z'^2xy). \end{cases}$$

D'ailleurs, des deux équations

$$ax^3 + by^3 + dxyz = cz^3, \quad ax'^3 + by'^3 + dx'y'z' = cz'^3$$

on tire

$$\frac{c(z^3y'^3 - y^3z'^3) + dyy'(y^2x'z' - y'^2xz)}{x^3y'^3 - y^3x'^3} = a,$$

$$\frac{c(x^3z'^3 - z^3x'^3) - dxx'(x^2y'z' - x'^2yz)}{x^3y'^3 - y^3x'^3} = b.$$

Si maintenant on substitue l'expression précédente de b dans la première des formules (2), on obtient

$$X = \frac{[3c(xz' - zx')(yz' - zy') + d(xy' - yx')^2](x^2y'z' - x'^2yz)}{x^2y'^2 + xyx'y' + y^2x'^2}.$$

Or la valeur de Y se déduit évidemment de celle de X en permutant x, y et x', y', et comme, par ce changement, tous les facteurs de X restent les mêmes, excepté $x^2y'z' - x'^2yz$, qui devient $y^2x'z' - y'^2xz$, on a

$$\frac{X}{Y} = \frac{x^2y'z' - x'^2yz}{y^2x'z' - y'^2xz}.$$

On obtient de même

$$\frac{Z}{Y} = \frac{z^2x'y' - z'^2xy}{y^2x'z' - y'^2xz}.$$

Les formules (51) sont donc étendues à l'équation (1).

M. Sylvester, si je ne me trompe, a communiqué sa démonstration à M. Lucas : il serait intéressant qu'elle fût publiée.

Veuillez agréer, Monsieur, etc.

DESBOVES.