Nouvelles annales de mathématiques

Weill

Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 160-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__160_1>

NOTE SUR LA CARDIOÏDE ET LE LIMAÇON DE PASCAL;

PAR M. WEILL.

Considérons deux circonférences se coupant aux points A et B. Par le point A menons une sécante quelconque rencontrant les deux circonférences aux points C et D, et menons en ces points les tangentes qui se rencontrent en M. Lorsque la sécante pivote autour du point A, l'angle $\widehat{CMD}$ reste constant; les quatre points C, M, D, B sont sur une même circonférence qui a pour enveloppe le lieu décrit par le point M. Ce lieu est une cardioïde ayant le point B pour point de rebroussement; si l'on mène au point A les tangentes aux deux circonférences données, ces deux droites déterminent respectivement sur les circonférences un point où elles sont touchées par la cardioïde. On en déduit les conséquences suivantes :

Théorème I. — *On considère deux coniques se coupant en* A, B, I, J. *Une sécante menée par le point* A *rencontre les coniques en* C *et* D; *on mène en ces points les tangentes qui se rencontrent en* M :

1° *Le rapport anharmonique de quatre quelconques des cinq droites* MC, MD, MB, MI, MJ *reste constant quand la sécante tourne autour du point* A.

2° *Les six points* M, C, D, B, I, J *sont sur une même conique, qui a pour enveloppe le lieu du point* M.

3° *Le lieu du point* M *est une courbe du quatrième degré ayant les points* B, I, J *pour points de rebroussement et tangente à chacune des coniques au point où elle est rencontrée par la tangente menée à l'autre au point* M.

Théorème II. — *Étant donnée une courbe quelconque du quatrième degré possédant trois points de rebroussement, par un point* A *de son plan on peut mener deux coniques touchant la courbe et passant par les trois points de rebroussement; la droite qui joint le point* A *au point où l'une des deux coniques touche la courbe est tangente à l'autre conique.*

Théorème III. — *Étant donnée une courbe quelconque* *du quatrième degré possédant trois points de rebroussement et une droite quelconque* D, *les quatre points de rencontre de cette droite* D *avec la courbe et les quatre points où cette même droite est touchée par les quatre coniques qui passent par les points de rebroussement et touchent la courbe se correspondent deux à deux, c'est-à-dire que, lorsque les coordonnées d'un des points du premier groupe sont données, celles d'un point du deuxième groupe sont des fonctions rationnelles des premières, et inversement.*

Pour démontrer ce théorème, considérons une courbe du quatrième degré ayant M, N, P pour points de rebroussement, prenons sur cette courbe un point K et menons par ce point une droite D; la conique qui passe par les quatre points M, N, P, K, en touchant la courbe considérée au point K, rencontre la droite D en un second point L; la conique qui touche la droite D au point L et qui passe par les points M, N, P touche la courbe considérée, en vertu du théorème précédent; à chaque point de rencontre de la droite D avec la courbe correspondra donc une conique et une seule touchant la droite D, passant par les trois points de rebroussement et touchant la courbe. La proposition est donc établie.

Appelons *cercle générateur de la cardioïde* le cercle variable qui passe par le point de rebroussement et touche la courbe.

Théorème IV. — *Si d'un point fixe* P *on mène les tangentes à la série des cercles générateurs de la cardioïde, le lieu des points de contact de ces tangentes est une courbe du sixième degré ayant un point double au point* P *et trois points triples, dont deux sont les ombilics du plan et le troisième est le point de rebroussement de la cardioïde; les tangentes en ce point triple* *sont la droite qui joint le point au point* P *et les deux bissectrices des angles formés par cette droite avec la tangente à la cardioïde. La courbe du sixième degré est unicursale.*

Pour établir ce théorème, il suffit de remarquer que le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe P à un système de coniques ayant pour caractéristiques μ, ν est une courbe de degré $\mu + \nu$ ayant au point P un point multiple d'ordre μ. Or, on a ici

$$\mu = 2, \quad \nu = 4.$$

Théorème V. — *Étant donnée une courbe quelconque du quatrième degré possédant trois points de rebroussement, si d'un point fixe* P *on mène les tangentes à toutes les coniques passant par les trois points de rebroussement et tangentes à la courbe, le lieu de leurs points de contact est une courbe du sixième degré, unicursale, ayant un point double au point* P *et trois points triples aux trois points de rebroussement; les tangentes en chacun des points triples se déterminent individuellement; l'une d'elles passe au point* P.

Théorème VI. — *Étant donnée une parabole et un point* P *dans son plan, on considère une tangente quelconque à la parabole et on mène un cercle tangent à cette droite et passant par le point* P *et le foyer de la parabole; le lieu des points de contact est une courbe du troisième degré; toute tangente à la parabole rencontre cette courbe du troisième degré en trois points que l'on peut trouver par la règle et le compas; en d'autres termes, l'équation du troisième degré dont dépend le problème a toujours une racine commensurable.*

Une propriété analogue se trouvera dans tout problème où il s'agira de trouver le lieu des points de contact des cercles passant par deux points fixes avec un système de droites ou de cercles dont le mouvement est déterminé. Cette remarque est susceptible d'une généralisation bien plus grande et donne des équations dont le premier membre se décompose, par suite d'une propriété géométrique qui permet de distinguer certaines racines des autres; on ne peut pourtant en conclure que les points qui correspondent à ces racines décrivent des courbes distinctes.

Théorème VII. — *Si d'un point* P *pris sur la cardioïde on mène les tangentes à l'un des cercles générateurs, les points de contact se déterminent individuellement. Quand on considère le système des cercles générateurs, le lieu des points de contact des tangentes menées du point* P *se compose de deux courbes distinctes; l'une est le cercle générateur qui passe au point* P, *et l'autre est une anallagmatique du quatrième degré ayant un point double au point de rebroussement de la cardioïde.*

Théorème VIII. — *Par un point fixe* P *pris sur une parabole et par le foyer on mène un cercle tangent à une tangente variable de la courbe; le lieu des points de contact se compose d'une droite et d'une conique; la droite est la tangente au point* P *à la parabole.*

Théorème IX. — *On considère une conique, un triangle circonscrit* ABC *et un point fixe* P *pris sur la courbe. Par ces quatre points on fait passer une conique tangente à une tangente variable de la conique fixe; les points de contact des deux coniques qui répondent à la question se déterminent individuellement; l'un d'eux décrit une droite et l'autre une conique.*

Théorème X. — *Étant donnée une courbe du qua-*

trième degré à trois points de rebroussement, si l'on considère une conique passant par ces trois points et tangente à la courbe, les points de contact des tangentes menées d'un point P *de la courbe à cette conique se déterminent individuellement; lorsque la conique varie, le point* P *restant fixe, le lieu des points de contact se compose de deux courbes distinctes; l'une est la conique qui passe par les trois points de rebroussement et touche la courbe au point* P; *l'autre est une courbe du quatrième degré ayant les trois points de rebroussement pour points doubles et qui est, par suite, unicursale.*

Les quatre derniers théorèmes que nous venons d'énoncer, et qui découlent de la même propriété, présentent l'exemple remarquable d'un système de deux points qu'aucune propriété géométrique ne semble distinguer et qui décrivent deux courbes entièrement différentes; on explique facilement ce résultat en observant que la quantité placée sous le radical carré introduit par la résolution de l'équation du second degré dont dépend la question est un carré parfait pour une position convenable du point P; ce cas se présente justement quand ce point fixe est situé sur la courbe considérée; le double signe du radical donne alors deux courbes différentes.

Considérons deux circonférences ayant pour centres O et O′, et un point M; soient MA et MB deux tangentes menées par ce point aux deux circonférences. Menons les droites OC, O′C respectivement parallèles à AM et MB, et joignons CM; cette droite rencontre en un point P la circonférence qui passe par les points O, C, O′. Ceci posé, si le point M se déplace de manière que l'angle AMB reste constant, la longueur CM sera constante et le point P sera un point fixe; dès lors, le point M décrit un *limaçon de Pascal* ayant le point P pour point double et le cercle OCO′ pour *cercle directeur*; ce résultat est bien connu.

Si l'on mène la tangente M'B' au cercle O' qui est parallèle à MB, elle détermine sur MA un point M', et le lieu de ce point est un deuxième *limaçon de Pascal* ayant pour point double un point Q situé sur le cercle OCO'.

Les deux points P et Q sont tels, comme le montre un raisonnement fort simple, que l'on voit de ces points les deux circonférences O et O' sous le même angle; ces points sont donc à l'intersection de la circonférence OCO' et de la circonférence qui a pour diamètre la droite SS' qui joint les centres de similitude des deux circonférences.

Le lieu des points d'où les tangentes menées à deux circonférences font un angle donné α se compose donc (lorsque l'angle α est bien défini) de deux limaçons. Si l'angle α varie, les points doubles P et Q des deux limaçons se meuvent sur une circonférence, et la droite PQ passe par un point fixe; le même résultat a lieu si les rayons des deux circonférences changent, leur rapport restant constant. Supposons les deux circonférences invariables, ainsi que l'angle α; le limaçon de Pascal correspondant et ayant le point P pour point double est doublement tangent à chacune des circonférences, et les droites qui joignent les points de contact se coupent sur l'axe de symétrie de la courbe. On en conclut les théorèmes suivants:

Théorème XI. — *On considère une circonférence variable dont le centre se meut sur une circonférence fixe et qui est vue d'un point* P *de cette circonférence sous un angle donné* ω; *cette circonférence a pour enveloppe un limaçon de Pascal ayant le point* P *pour point double; considérant deux quelconques de ces circonférences comme fixes, l'angle circonscrit et ayant son sommet en un point quelconque du limaçon sera con-*

stant; la circonférence variable est orthogonale à une circonférence fixe.

THÉORÈME XII. — *Un cercle doublement tangent à une conique et dont le centre est sur l'axe non focal est vu d'un foyer sous un angle constant et égal au supplément de l'angle des asymptotes.*

THÉORÈME XIII. — *Le lieu des foyers des coniques qui restent semblables à elles-mêmes et doublement tangentes à un cercle fixe (la corde de contact étant parallèle à l'axe focal), et qui sont assujetties à une autre condition simple quelconque, est un cercle concentrique au cercle donné.*

THÉORÈME XIV. — *Si l'on considère une suite de cercles ayant leurs centres sur le cercle directeur d'un limaçon de Pascal et doublement tangents à cette courbe, le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point* P *du plan à ces cercles est une courbe du sixième degré ayant pour points doubles le point* P *et le point double du limaçon et pour points triples les ombilics du plan.*

Considérons une circonférence O et le limaçon de Pascal ayant cette circonférence pour directrice et un point P de cette circonférence pour point double. Considérons la circonférence qui a son centre en un point A de cette circonférence et qui est doublement tangente au limaçon. Soit un point M du limaçon situé sur le rayon vecteur PM qui rencontre la circonférence en un point B. Menons la droite AB et par le point M une parallèle MC à cette droite; MC touchera au point C la circonférence A; le rayon CA rencontre la circonférence O en un point D. Le cercle qui a pour diamètre MD touche le limaçon au point M et passe par le point double P et par le point de contact C de la tangente MC menée du point M au cercle A. On a donc les théorèmes suivants :

Théorème XV. — *Étant donnée une circonférence ayant son centre sur le cercle directeur d'un limaçon de Pascal et doublement tangente à la courbe, les points de contact des tangentes menées à cette circonférence par un point* M *du limaçon se déterminent individuellement; si la circonférence varie, l'un des points de contact décrit la circonférence qui touche le limaçon au point* M *en passant par le point double, et l'autre décrit une anallagmatique du quatrième degré.*

Théorème XVI. — *Étant donnés un cercle doublement tangent à un limaçon de Pascal et ayant son centre sur le cercle directeur, et une droite* D *tangente à ce cercle, l'équation du quatrième degré qui donne les points de rencontre de la droite* D *avec la courbe a une racine rationnelle en fonction des coefficients.*

Théorème XVII. — *Si l'on considère un point* A *d'une conique et un cercle* C *doublement tangent à la courbe (la corde de contact étant parallèle à l'axe focal), les deux cercles qu'on peut mener par le point* A *et le foyer* F *tangentiellement au cercle* C *se déterminent individuellement; le point de contact du cercle* C *avec l'un d'eux se trouve sur la tangente menée par le point* A *à la conique.*

Le théorème que nous venons d'énoncer se prête à un grand nombre d'énoncés différents, car il établit une relation entre les tangentes qu'on peut mener par un point à une conique, les foyers et les deux cercles qu'on peut mener par le point ayant avec la conique un double contact, la corde de contact étant parallèle à l'axe focal. On a, en particulier, les théorèmes suivants :

Théorème XVIII. — *Le lieu des foyers d'une conique tangente à une droite* D *en un point* A *et doublement tangente à un cercle* C (*la corde de contact étant parallèle à l'axe focal*) *se compose de deux cercles passant par le point* A *et respectivement tangents au cercle* C *aux points où il est rencontré par la droite* D.

Théorème XIX. — *Le lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux circonférences se compose d'une droite et d'une circonférence, pourvu que les cordes de contact soient parallèles dans les deux circonférences.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer, d'après le théorème XII, que du foyer on voit sous le même angle deux circonférences doublement tangentes à la conique et ayant leurs centres sur l'axe non focal.

Considérons deux courbes quelconques et un angle AMB formé par les tangentes MA et MB menées du point M aux deux courbes; lorsque le point M se déplace, l'angle AMB restant constant, le cercle circonscrit au triangle AMB a deux enveloppes; l'une est le lieu du point M, car, pour mener la tangente en M au lieu décrit par ce point, on peut remplacer les deux courbes, dans le voisinage des points A et B, par ces points eux-mêmes; pour obtenir le point de contact du cercle avec sa deuxième enveloppe, considérons les cercles O et O′, osculateurs aux deux courbes en A et B; comme le cercle AMB dépend des éléments infiniment petits du premier ordre, la recherche de son enveloppe ne dépendra que de ceux du deuxième ordre, et l'on pourra substituer aux deux courbes leurs cercles osculateurs; le point de contact du cercle avec sa deuxième enveloppe est donc le point double P du limaçon de Pascal qui constitue le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante AMB circonscrit aux deux circonférences O et O′; on aura donc ce point P en menant par les points O et O′ des parallèles OD, O′D aux droites MA, MB et en joignant les points M et D; le point où la droite MD rencontre la circonférence est le point cherché.

Reprenons le système de deux cercles O et O′ et de l'angle AMB de grandeur constante circonscrit aux deux cercles. Le point M décrit un limaçon de Pascal ayant pour point double un point P situé sur la circonférence OO′M. D'après ce qui a été démontré plus haut, on voit du point P les deux circonférences O et O′ sous le même angle; donc le rapport des rayons OA, O′B est égal au rapport des distances PO, PO′; de plus, il est facile de voir que les angles AOP, BO′P sont égaux; on en conclut que le rapport $\frac{PA}{PB}$ reste constant, ainsi que l'angle APB; donc, quand le point M se déplace sur le limaçon, le triangle APB reste semblable à lui-même; en particulier, l'angle PAB reste constant, et, comme le point A se meut sur une circonférence, la droite AB enveloppe une conique ayant le point P pour foyer.

On a donc les théorèmes suivants :

Théorème XX. — *Quand un angle* AMB *de grandeur constante est circonscrit à deux cercles, la droite* AB *qui joint les points de contact de ses côtés avec les deux cercles enveloppe une conique ayant pour foyer le point double du limaçon de Pascal qui constitue le lieu du point* M.

Théorème XXI. — *Si autour du foyer commun* F *de deux coniques on fait tourner un angle* AFB *égal à l'angle des axes focaux des deux coniques, le lieu du point* M *de rencontre des tangentes menées aux deux coniques respectivement en* A *et* B *est un cercle.*

On peut envisager le problème qui consiste à trouver le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à deux circonférences comme un cas particulier du problème suivant:

Trouver le lieu du sommet d'un angle circonscrit à deux circonférences, les coefficients angulaires des côtés étant liés par une relation linéaire par rapport à chacun d'eux.

Le lieu est alors du huitième degré; il se décompose lorsque l'angle doit être constant (on a alors deux limaçons de Pascal), ou bien lorsque l'angle doit avoir une bissectrice de direction constante. Dans ce dernier cas, l'équation de chacune des courbes du quatrième degré qui composent le lieu prend une forme remarquable; avec des axes rectangulaires convenablement choisis, cette équation est

$$xy = K\delta + H^2,$$

H et K étant des constantes, et δ étant la distance d'un point du lieu à un point fixe situé sur l'hyperbole équilatère qui a pour équation

$$xy - H^2 = 0.$$