NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. HILAIRE

Solution d'une question proposée en 1876 au concours entre les classes de mathématiques spéciales de l'académie de Douai

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 14-17

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__14_0>

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE EN 1876 AU CONCOURS ENTRE LES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DE L'ACADÉMIE DE DOUAI ;

PAR M. A. HILAIRE,

Professeur au lycée de Douai.

A, B, C, D *étant les pieds des quatre normales à une ellipse donnée, issues d'un même point* P, *on suppose que le point* P *se déplace de manière que la corde* AB *conserve une direction constante, et on demande le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles* ABC *et* ABD.

Soient $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse donnée, $y - mx - n = 0$ l'équation de la droite AB dans une de ses positions; la droite CD, si elle était indépendante de AB, aurait une équation de la forme $px + qy + r = 0$, et, en admettant que p, q, r contiennent implicitement un même facteur indéterminé, l'équation

$$(1)\quad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + (y - mx - n)(px + qy + r) = 0$$

représenterait une conique *quelconque* passant par les quatre points A, B, C, D. Pour avoir l'équation véritable de CD, j'exprime que la conique (1) se confond avec l'hyperbole équilatère qui doit contenir les pieds des quatre normales : il suffit d'écrire que dans l'équation (1) les coefficients de x^2 et de y^2 sont nuls, ainsi que le terme indépendant.

J'ai ainsi

$$a^2 + q = 0, \quad \text{d'où} \quad q = -a^2,$$

$$b^2 - mp = 0, \qquad p = \frac{b^2}{m},$$

$$a^2b^2 + nr = 0, \qquad r = -\frac{a^2b^2}{n}.$$

L'équation de CD est donc

$$\frac{b^2}{m}x - a^2 y - \frac{a^2b^2}{n} = 0.$$

C′ et D′ étant les points symétriques de C et D par rapport au centre de l'ellipse, la figure CDC′D′ est un parallélogramme concentrique à l'ellipse, et, d'après le théorème de Joachimsthal, les cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD passent respectivement par les points D′ et C′.

Or il est facile d'avoir l'équation du système des parallèles CD′, DC′.

En effet, l'équation du système des parallèles CD, C′D′ étant évidemment

$$\left(\frac{b^2}{m}x - a^2 y\right)^2 - \frac{a^4b^4}{n^2} = 0,$$

l'équation générale des coniques passant par les points de rencontre de l'ellipse et de ce premier système est

$$(2) \quad \lambda(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) - \left[\left(\frac{b^2}{m}x - a^2y\right)^2 - \frac{a^4b^4}{n^2}\right] = 0.$$

J'écris la condition pour avoir une conique du genre parabole :

$$\frac{a^4b^4}{m^2} + (a^4 - \lambda a^2)\left(\lambda b^2 - \frac{b^4}{m^2}\right) = 0$$

ou

$$-\lambda^2 a^2 b^2 + \lambda\left(a^4 b^2 + \frac{a^2b^4}{m^2}\right) = 0.$$

Cette condition se dédouble en $\lambda = 0$, qui donne le système CD, C′D′, et $\lambda = a^2 + \frac{b^2}{m^2}$, qui correspond au système CD′, DC′.

On a donc, pour équation de ce dernier système,

$$\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right)(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)$$
$$- \left[\left(\frac{b^2}{m}x - a^2y\right)^2 - \frac{a^4b^4}{n^2}\right] = 0,$$

$$\frac{b^2a^2}{m^2}y^2 + a^2b^2x^2 + 2\frac{a^2b^2}{m}xy + \frac{a^4b^4}{n^2} - a^2b^2\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) = 0,$$

ou, en divisant tout par a^2b^2,

$$\left(\frac{y}{m} + x\right)^2 + \frac{a^2b^2}{n^2} - \left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{y}{m} + x\right)^2 - \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2b^2}{n^2}\right] = 0,$$

$$(y + mx)^2 - m^2\left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2b^2}{n^2}\right] = 0,$$

ou, en posant

(3) $$n'^2 = m^2\left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2b^2}{n^2}\right],$$

$$(y + mx)^2 - n'^2 = 0.$$

D'après cela, l'équation générale des coniques circonscrites à l'un des quadrilatères ABCD′ ou ABDC′ est

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + \mu(y - mx - n)(y + mx \pm n') = 0.$$

Cette équation représentera un cercle, puisqu'il n'y a pas de terme en xy, si $a^2 + \mu = b^2 - \mu m^2$, d'où $\mu = -\frac{c^2}{1 + m^2}$. On remplacera μ par sa valeur et l'équation ne contiendra plus que les indéterminées n et n'. Représentons-la par

(4) $$f(x, y) = 0.$$

Le centre est donné par les deux équations

$$(5) \qquad f'(x) = 0,$$
$$(6) \qquad f'(y) = 0,$$

qui contiendront aussi les indéterminées n et n'; donc, pour avoir l'équation du lieu, il n'y a qu'à éliminer n et n' entre les équations (5) et (6) et la relation (3).

L'élimination est immédiate, car les équations (5) et (6) ne contiennent n et n' qu'au premier degré.