NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PICART

Nouvelle méthode d’intégration de l’équation différentielle des lignes de courbure de l’ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 145-149

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__145_0>

NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. A. PICART.

1. Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a^2>b^2>c^2)$ l'équation de l'ellipsoïde. L'équation différentielle des lignes de courbure de cette surface est, en posant, pour abréger,

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A,\qquad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B,$$

$$(1)\qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

2. Cette équation a été intégrée pour la première fois par Monge. Le procédé suivi par cet illustre géomètre consiste à différentier cette équation pour éliminer les constantes A et B. Cette élimination de deux constantes exige généralement deux différentiations successives; mais, dans ce cas particulier, une seule différentiation permet d'éliminer à la fois A et B, et l'on obtient l'équation du second ordre

$$(2)\qquad xy\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{y}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\,\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=0.$$

Le premier membre est la dérivée de $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$; on a donc, par une première intégration,

$$(3)\qquad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = C.$$

Une seconde intégration donne immédiatement

$$(4)\qquad y^2 = C.x^2 + C'.$$

Reste à déterminer une relation entre les constantes C et C′, par la condition que la valeur de y tirée de (4) satisfasse identiquement à l'équation (1).

3. Ce procédé d'intégration s'applique à un grand nombre d'équations, et les calculs qu'il exige sont généralement simples. Mais il faut reconnaître qu'il est un peu détourné et que, faisant dépendre l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre de celle d'une équation d'ordre supérieur, il semble prendre les choses à rebours de la marche naturelle.

Ne pourrait-on intégrer directement l'équation (1) sans passer par la différentiation? C'est ce que nous nous proposons d'examiner.

4. Résolvons l'équation (1) par rapport à $\frac{dy}{dx}$; il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^2 - Ay^2 - B) + \sqrt{x^4 + 2Ax^2y^2 + A^2y^4 - 2Bx^2 + 2ABy^2 + B^2}}{2Axy}$$

ou

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} 2Axy\,dy \\ \quad + \left(x^2 - Ay^2 - B + \sqrt{x^4 + 2Ax^2y^2 + A^2y^4 - 2Bx^2 + 2ABy^2 + B^2}\right)dx = 0. \end{array} \right.$$

Multiplions cette dernière équation par x et posons

$$x^2 = u, \quad y^2 = v,$$

d'où

$$2x\,dx = du, \quad 2y\,dy = dv;$$

nous obtenons ainsi

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&2\mathrm{A}u\,dv\\
&\quad+\left(u-\mathrm{A}v-\mathrm{B}+\sqrt{u^2+2\mathrm{A}uv+\mathrm{A}^2v^2-2\mathrm{B}u+2\mathrm{AB}v+\mathrm{B}^2}\right)du=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons que, dans cette équation différentielle, les quantités u et v, égales respectivement à x^2 et y^2, doivent être regardées comme essentiellement positives.

On reconnaît aisément que les coefficients de du et de dv conservent le même signe pour toute valeur positive de u et v. La chose est évidente pour le coefficient de dv; quant au coefficient de du, si on l'égale à o, on obtient, en chassant le radical,

$$4\mathrm{A}uv=0,$$

d'où l'on voit que le coefficient ne s'annule que pour $u=0$ et $v=0$; il conserve donc le même signe pour toute valeur positive de u.

Il résulte de là que le coefficient différentiel $\dfrac{dv}{du}$ ou son inverse $\dfrac{du}{dv}$ garde constamment le même signe. La quantité v, considérée comme fonction de u, est donc constamment croissante ou décroissante; il en est de même de la quantité u considérée comme fonction de v. En d'autres termes, si l'on regarde u et v comme les coordonnées d'un point dans un plan, le système de lignes que représente l'équation (6) est tel que chacune de ces lignes n'est coupée qu'en un point par une parallèle à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

Cela nous conduit à examiner si l'intégrale de l'équation (6) ne serait pas linéaire en u et v, de la forme

$$v=hu+k.$$

Si l'on pose

$$(7)\quad z=u-\mathrm{A}v-\mathrm{B}+\sqrt{u^2+2\mathrm{A}uv+\mathrm{A}^2v^2-2\mathrm{B}u+2\mathrm{AB}v+\mathrm{B}^2}$$

et qu'on regarde u, v, z comme les coordonnées d'un point de l'espace, l'intégration de l'équation (1) revient à trouver, sur la surface du second ordre que représente l'équation (7), un système de lignes telles que les projections de chacune d'elles sur le plan des uv et des uz remplissent la condition géométrique exprimée par l'équation

$$(8) \qquad \frac{dv}{du}\,\frac{u}{z} = -\frac{1}{2A}.$$

S'il existe une relation linéaire entre v et u, comme dans ce cas $\frac{dv}{du}$ est constant, il faut que $\frac{u}{z}$ soit aussi constant, et de plus que le produit de ces deux quantités soit égal à $-\frac{1}{2A}$.

Nous avons donc à rechercher s'il existe un système réel de lignes droites sur la surface (7), si ces lignes se projettent sur le plan des uz suivant des droites passant par l'origine des coordonnées, et si le produit des coefficients angulaires $\frac{dv}{du}$, $\frac{u}{z}$ des projections de ces droites sur les plans uv et uz est égal à $-\frac{1}{2A}$.

Mettons l'équation (7) sous forme rationnelle :

$$(9) \qquad z^2 - 2z(u - Av - B) - 4Auv = 0;$$

on voit sans peine que l'axe des v est sur la surface. En conséquence, tout plan passant par cette droite coupe la surface suivant une autre droite. Voilà donc un système de droites situées sur la surface et se projetant sur le plan des uz suivant des droites passant par l'origine. Il reste à vérifier si la relation (8) est satisfaite par les projections de ces droites sur les plans des uv et des uz. Soit $u = mz$ la projection de l'une de ces droites sur le plan des uz. Faisons $z = \frac{u}{m}$ dans l'équation (9); nous obtenons, en divisant par u, l'équation

$$(10) \qquad u - 2m(u - Av - B) - 4m^2 Av = 0,$$

qui représente un système de droites dont le coefficient angulaire est

$$-\frac{1-2m}{2mA(1-2m)} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2mA}.$$

Le produit de ce coefficient angulaire par m est bien égal à $-\frac{1}{2A}$.

Donc l'équation (10), où entre une constante arbitraire m, est l'intégrale générale de l'équation différentielle (6).

En remplaçant dans cette équation u et v par x^2 et y^2 et $2m$ par k, on obtient, pour la projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde sur le plan des xy, l'équation suivante

$$Ay^2 + \frac{x^2}{k} = \frac{B}{k-1},$$

ou

$$\frac{x^2}{\frac{Bk}{k-1}} + \frac{y^2}{\frac{B}{A(k-1)}} = 1,$$

qui représente des ellipses réelles pour les valeurs de k supérieures à 1, des ellipses imaginaires pour k positif et plus petit que 1, et des hyperboles pour k négatif. Le grand axe des ellipses et l'axe transverse des hyperboles sont dirigés suivant l'axe des x.