Concours général de 1880

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 134-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__134_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880.

Mathématiques spéciales.

Sur une courbe donnée du troisième degré, ayant un point de rebroussement O, on considère une suite de points A_{-n}, $A_{-(n-1)}$, ..., A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant :

1° Étant données les coordonnées du point A_0, on propose de trouver les coordonnées des points A_{-n} A_n, et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice n augmente indéfiniment.

2° On demande le lieu décrit par le premier point limite lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement O, la même tangente en ce point, et en passant constamment par trois points fixes P, Q, R.

3° On étudiera comment varient les points d'intersection de ce lieu et des côtés du triangle PQR, quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par le point O.

Philosophie.

La Terre étant supposée sphérique, on considère le point M de la surface dont la latitude est égale à la longitude :

1° Déterminer le lieu des projections des points M sur le plan de l'équateur;

2° Déterminer le lieu des droites AM, A étant le point de l'équateur à partir duquel on compte les longitudes.

Mathématiques élémentaires.

I. Résoudre le système de n équations à n inconnues :

$$(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + 1.2\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = 9\,a^2,$$
$$(x_1 + x_3 + \ldots + x_n) + 2.3\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = 25\,a^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + n(n+1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = (2n+1)^2 a^2.$$

II. D'un point O pris dans le plan d'un cercle partent quatre droites qui coupent sa circonférence, la première aux points a et a', la deuxième aux points b et b'; la troisième aux points c et c'; et la quatrième aux points d et d'.

Prouver que les sinus des moitiés des arcs ac, bd, ad, bc, $a'c'$, $b'd'$, $a'd'$, $b'c'$ sont liés entre eux par la relation

$$\frac{\sin\frac{ac}{2}\sin\frac{bd}{2}\sin\frac{a'd'}{2}\sin\frac{b'c'}{2}}{\sin\frac{cb}{2}\sin\frac{da}{2}\sin\frac{d'b'}{2}\sin\frac{a'c'}{2}} = 1.$$

Rhétorique.

I. Aux deux extrémités A et B du diamètre AB d'un demi-cercle, on lui mène deux tangentes; on construit ensuite une troisième tangente, qui coupe les deux premières aux points C et D. On demande de déterminer cette tangente de manière que le volume engendré par le trapèze ABDC en tournant autour du diamètre AB et la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre soient entre eux dans le rapport de m à 1. Discussion.

II. Révolution sidérale et révolution synodique de la Lune. Orbite décrite par la Lune autour de la Terre.

Seconde.

Sur le côté BC d'un triangle ABC ou sur son prolongement, on prend un point arbitraire D. On fait passer deux circonférences, l'une par les points A, B et D, l'autre par les points A, C et D; soient O et O′ les centres de ces deux circonférences. On propose :

1° De démontrer que le rapport des rayons de ces deux circonférences est indépendant de la position du point D sur le côté BC;

2° De déterminer la position que doit occuper le point D pour que les deux rayons aient la plus petite longueur possible;

3° De démontrer que le triangle AOO′ est semblable au triangle ABC;

4° De trouver le lieu décrit par le point M qui partage la droite OO′ dans le rapport de deux longueurs données m et n; on examinera le cas particulier où le point M est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur OO′.

Troisième.

I. Par les deux extrémités d'une droite AB, et d'un même côté de cette droite, on lui élève deux perpendiculaires AC et BD, telles que l'aire du trapèze ABCD ait une valeur constante donnée. Du milieu E de la droite AB on abaisse une perpendiculaire EM sur la droite CD. Trouver le lieu décrit par le pied M de cette perpendiculaire, quand on fait varier les longueurs des perpendiculaires AC et BD.

Même problème quand les lignes AC et BD, au lieu d'être perpendiculaires à AB, sont parallèles à une droite fixe donnée.

II. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les deux diagonales, l'angle qu'elles forment entre elles, et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère. Discussion.