NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. COLLIN

Sur le théorème de Rolle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 132-133
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__132_1>

SUR LE THÉORÈME DE ROLLE;

PAR M. J. COLLIN

Dans le cas où il s'agit d'équations algébriques, le théorème de Rolle peut se démontrer de la manière suivante.

Soient $f(x) = 0$ l'équation considérée; $a, b, c, \ldots, l$ ses racines reelles, a et b étant deux racines consécutives; $\varphi(x)$ le polynôme relatif aux racines imaginaires et $\psi(x)$ le quotient de $f(x)$ par $x - a$, de sorte que

$$f(x) = (x - a)(x - b)\ldots(x - l)\,\varphi(x) = (x - a)\,\psi(x).$$

D'après un théorème bien connu, on a

$$f'(a) = \psi(a).$$

donc

$$f'(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-l)\varphi(a),$$

et de même

$$f'(b) = (b-a)(b-c)\ldots(b-l)\varphi(b).$$

Or, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont de même signe; tous les autres facteurs de $f'(a)$ et $f'(b)$ sont aussi de même signe, à l'exception de $(a-b)$ et $(b-a)$, qui sont de signes contraires. Donc $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes contraires; donc l'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre impair de racines comprises entre a et b.

Le théorème de Rolle n'est ainsi qu'un corollaire immédiat du théorème des substitutions.