NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEZ

Solution de la question proposée pour le concours d'admission à l'École polytechnique en 1880

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 127-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__127_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR LE CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880;

Par M. H. LEZ.

Soient M *et* N *les points où l'axe des x rencontre le cercle $x^2 + y^2 = r^2$; considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points* M *et* N; *menons, par un point* Q *pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole.*

Soient A *et* B *les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites* QA *et* QB, *l'une est parallèle à une direc-*

tion fixe et l'autre passe par un point fixe P. *Le point* P *étant donné, l'hyperbole correspondante qui passe par les points* M *et* N *est déterminée; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point* P *décrit la droite* $y = x$, *quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.*

Pour qu'une hyperbole équilatère

$$(1) \qquad x^2 + 2hxy - y^2 + 2gy + 2fx + l = 0$$

passe par les points M, N, il faut que le trinôme $x^2 + 2fx + l = 0$ soit vérifié par $x = \pm r$, c'est-à-dire que le terme en x soit nul; alors $l = -r^2$, et l'équation (1) devient

$$(2) \qquad x^2 + 2hxy - y^2 + 2gy - r^2 = 0.$$

Mais la polaire d'un point $Q(\mu, \nu)$, par rapport à cette conique, est représentée par

$$(\mu + h\nu)x + (h\mu - \nu + g)y + g\nu - r^2 = 0;$$

si le point Q est sur le cercle

$$(3) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

on a

$$\mu = r\cos\alpha, \quad \nu = r\sin\alpha,$$

et, pour l'équation de la polaire,

$$r(\cos\alpha + h\sin\alpha)x + (hr\cos\alpha - r\sin\alpha + g)y + r(g\sin\alpha - r) = 0.$$

Or cette droite rencontrant le cercle (3) en deux points,

$$(\mathrm{A}) \qquad x = r\cos\alpha, \quad y = -r\sin\alpha,$$

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{r\cos\alpha(r^2 - r^2h^2 - g^2) + 2hr^2(r\sin\alpha - g)}{r^2 + r^2h^2 + g^2 + 2gr(h\cos\alpha - \sin\alpha)}, \\ y &= \frac{r\sin\alpha(r^2h^2 - r^2 - g^2) + 2r^2(rh\cos\alpha + g)}{r^2 + r^2h^2 + g^2 + 2gr(h\cos\alpha - \sin\alpha)}, \end{aligned} \right.$$

on trouve, pour l'équation de QA,

$$x = r \cos\alpha,$$

et, pour celle de QB,

$$(hr + g\cos\alpha)y + (r - g\sin\alpha)x - (h\sin\alpha + \cos\alpha)r^2 = 0.$$

La première droite est donc perpendiculaire à MN et la seconde passe par un point fixe P $\left(x = -\dfrac{r^2 h}{g}, y = \dfrac{r^2}{g}\right)$; car son équation peut facilement se mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{r^2}{g}\right)(hr + g\cos\alpha) = \left(x + \frac{r^2 h}{g}\right)(g\sin\alpha - r).$$

Ce point P est le pôle de MN par rapport à l'hyperbole équilatère (2). Lorsqu'il est donné, l'équation (2) ne contient plus de coefficients variables; car on écrira

$$(4) \qquad x^2 - \frac{2d}{c}xy - y^2 + \frac{2r^2}{c}y - r^2 = 0,$$

en faisant

$$d = -\frac{r^2 h}{g}, \quad \frac{r^2}{g} = c.$$

L'hyperbole équilatère est donc bien déterminée. Les dérivées $dx + cy = r^2$, $cx - dy = 0$ montrent que son centre est à la rencontre de la polaire du point P, par rapport au cercle (3), avec une droite passant par l'origine O et le même point P. Quant aux axes, leurs coefficients angulaires étant donnés par l'équation

$$du^2 - 2cu - d = 0,$$

de laquelle on tire

$$u = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + d^2}}{d} = \frac{c \pm \gamma}{d},$$

ils sont faciles à tracer; d'ailleurs, ils sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites $y = 0$, $dx + cy = r^2$.

Connaissant la direction des axes, on a celle des asymptotes.

Or, les asymptotes et un point quelconque M ou N étant donnés, on peut déterminer la longueur des axes et par suite les sommets.

En décrivant une circonférence sur le diamètre HMK, perpendiculaire à l'axe transverse, on a, en effet,

$$\overline{IM}^2 = MH.MK = a^2 = b^2.$$

Enfin, si le point P doit suivre la droite $y = x$, il faut que $d = c$; alors l'équation (4) devient

$$x^2 - 2xy - y^2 + \frac{2r^2}{c}y - r^2 = 0.$$

En l'identifiant avec l'équation générale aux foyers

$$(1 - m^2)x^2 - 2mnxy + (1 - n^2)y^2 - 2(\alpha + mp)x \\ - 2(\beta + np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0,$$

on a les égalités

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{1 - m^2} &= \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{mn} = \frac{0}{2(\alpha + mp)} \\ &= -\frac{r^2}{c(\beta + np)} = -\frac{r^2}{\alpha^2 + \beta^2 - p^2}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$p = -\frac{\alpha}{m} \quad \text{et} \quad -r^2 mn = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\alpha^2}{m^2}.$$

Cette dernière relation entre les coordonnées α et β des foyers permet d'avoir de suite le lieu demandé, car des égalités (5) on tire encore

$$m^2 = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{2}}, \quad n^2 = \frac{\sqrt{2} \mp 1}{\sqrt{2}}, \quad mn = \mp \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui fournit deux équations différentes :

1° Celle d'une ellipse

$$(6) \qquad r^2(\sqrt{2}+1) = \alpha^2\sqrt{2} + \beta^2(2+\sqrt{2});$$

2° Celle d'une hyperbole

$$(7) \qquad r^2(\sqrt{2}-1) = \alpha^2\sqrt{2} - \beta^2(2-\sqrt{2}).$$

Ces deux coniques passent par les sommets d'un carré, ont leur centre à l'origine et leurs foyers en M, N; elles sont donc homofocales. Quand $2c^2 > r^2$, le point P est à l'extérieur du cercle (3), les foyers des hyperboles équilatères décrivent l'ellipse (6); par contre, ils décrivent l'hyperbole (7) si $2c^2 < r^2$.

Note. — Solution analytique de M. Albert Isay, élève du lycée de Nancy.

M. J.-B. Pomey a envoyé une excellente solution géométrique. Nous en avons d'ailleurs déjà publié une dans le Tome précédent.