Nouvelles annales de mathématiques

A. Picart

Surfaces applicables sur des surfaces de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 113-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__113_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SURFACES APPLICABLES SUR DES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. A. PICART.

1. M. Haton de la Goupillière, dans une Communication faite à la Société philomathique le 17 mars 1867, a donné la solution de la question suivante :

Quelles sont les surfaces sur lesquelles on peut tracer un réseau isotherme ou isométrique, c'est-à-dire décomposant la surface en carrés infiniment petits, qui soit formé de lignes géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales?

Il a trouvé, en considérant la forme de l'élément linéaire de la surface qui est propre aux systèmes isométriques, savoir

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2), \tag{1}$$

que les seules surfaces jouissant de cette propriété sont les surfaces applicables sur des surfaces de révolution.

2. Ce résultat peut s'établir immédiatement à l'aide des principes les plus simples de la Géométrie des surfaces.

Il suffit de se rappeler l'expression de la *courbure géodésique* $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)$ des lignes d'un réseau orthogonal et le théorème de Gauss qui en est une conséquence.

Soit, en effet, un réseau isométrique formé par des lignes géodésiques (X) et leurs trajectoires orthogonales (Y). Les éléments de lignes géodésiques compris entre deux trajectoires orthogonales infiniment voisines étant égaux, d'après le théorème de Gauss, les carrés compris entre ces deux mêmes trajectoires sont tous égaux; par suite, la *courbure géodésique* de chacune des trajectoires, qui est égale (si l'on désigne par dy l'élément de trajectoire et par δx l'élément de ligne géodésique) à $\frac{\delta dy}{dy\,\delta x}$, est constante. *Le système des trajectoires est donc formé de lignes d'égale courbure géodésique.*

Or, il est facile de démontrer le théorème suivant :

Quand il existe sur une surface un système de lignes géodésiques ayant pour trajectoires orthogonales un système de lignes d'égale courbure géodésique, ou, en d'autres termes, *quand on peut tracer sur une surface un système de lignes parallèles de courbure géodésique constante, la surface est nécessairement applicable sur une surface de révolution.*

En effet, la courbure géodésique de ces lignes peut être regardée comme une fonction de l'arc s qu'elles déterminent sur une certaine ligne géodésique, à partir d'un point fixe, pris pour origine; dès lors, si l'on considère la surface de révolution sur laquelle la courbure géodésique des paralleles soit exprimée par la même fonction de l'arc de méridienne, on voit que les deux surfaces pourront être decomposées en carrés infiniment petits, respectivement égaux entre eux, et, par suite, seront applicables l'une sur l'autre.

Mais quelle est la surface de révolution sur laquelle la courbure géodésique des parallèles est une fonction $\varphi(s)$ de l'arc de méridienne?

Si l'on désigne par x le rayon d'un parallèle, on trouve l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{dx}{x\,ds} + \varphi(s) = 0,$$

dont l'intégrale première est

$$(3)\qquad x = C e^{-\int_0^s \varphi(s)\,ds}.$$

C'est là l'équation de la méridienne. Il y entre un paramètre arbitraire C. Si l'on fait varier ce paramètre, on a une infinité de surfaces de révolution toutes applicables les unes sur les autres. Elles forment une famille dont les surfaces individuelles se distinguent par la valeur du module C.

Le théorème précédent permet de reconnaître immédiatement que *les hélicoïdes sont applicables sur des surfaces de révolution,* propriété découverte par Bour, car il est évident que les hélices décrites par les différents points du profil générateur sont des lignes parallèles et de courbure géodésique constante.

Il y a plus, on peut trouver très simplement, en s'appuyant sur les mêmes principes, la relation qui existe entre le profil générateur de l'hélicoïde et la méridienne de la surface de révolution.

Soit L le profil de l'hélicoïde rapporté à l'axe Oy de la surface et à la perpendiculaire Ox. Considérons l'hélice décrite par le point M, dont les coordonnées sont x et y. Si p est le *pas* de la surface, la tangente à cette hélice en M fait avec l'axe un angle α dont la tangente est $\frac{2\pi x}{p}$. Si l'on désigne par ε et λ les angles que la tangente en M au profil fait avec Ox et avec la tangente à l'hélice, on trouve, pour la courbure géodésique G de l'hélice sur l'hélicoïde,

$$(4)\qquad G = -\frac{\sin^2\alpha}{x}\frac{\cos\varepsilon}{\sin\lambda},$$

car $\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\alpha}{x}$ et $\cos\theta = -\frac{\cos\varepsilon}{\sin\lambda}$, ou

$$(5)\qquad G = -\frac{\sin^2\alpha\cos\varepsilon}{x\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cos^2\alpha}},$$

puisque $\cos\lambda = \sin\varepsilon\cos\alpha$, ou enfin, en remplaçant $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ respectivement par

$$\frac{4\pi^2 x^2}{p^2+4\pi^2 x^2},\quad \frac{p^2}{p^2+4\pi^2 x^2},\quad \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},\quad \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$$(6)\qquad G = \frac{4\pi^2 x}{\sqrt{(p^2+4\pi^2 x^2)\left[p^2+4\pi^2 x^2+4\pi^2 x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}}.$$

Telle est la courbure géodésique des hélices exprimée en fonction de l'x des différents points du profil et du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Il faut exprimer cette courbure en fonction de l'arc de *ligne géodésique* qui leur est orthogonal.

Or, en appelant s cet arc et σ l'arc du profil, on a évidemment

$$(7)\qquad ds = d\sigma \sin\lambda,$$

d'où, en remplaçant $d\sigma$ et $\sin\lambda$ par leurs valeurs,

$$(8)\qquad ds = \sqrt{1+\frac{4\pi^2 x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{p^2+4\pi^2 x^2}}\,dx.$$

Si l'on suppose le profil connu, x est, en vertu de cette dernière formule, une certaine fonction de s qui, mise à la place de x dans l'équation (6), donnera la courbure géodésique des hélices en fonction de l'arc s. Si l'on désigne par $\varphi(s)$ cette fonction, la courbe méridienne de la surface de révolution sur laquelle l'hélicoïde est applicable aura pour équation

$$(9)\qquad x = Ce^{-\int_0^s \varphi(s)\,ds}.$$

Réciproquement, connaissant la fonction $\varphi(s)$ qui exprime la variation de la courbure géodésique des parallèles d'une surface de révolution donnée, on pourra déterminer le profil générateur de l'hélicoïde sur lequel cette surface est applicable. Il sera donné par les formules (9) et (8). De la formule (9) on tirera la valeur de s en x, par suite celle de ds, et l'on portera cette dernière dans (8), ce qui donnera une équation différentielle entre x et $\frac{dy}{dx}$ dont l'intégration fournira l'équation du profil.

Remarquons que de l'équation (8) et de l'équation (6), où l'on remplace G par $\varphi(s)$, on déduit l'équation

$$\varphi(s)\,ds + \frac{4\pi^2 x\,dx}{p^2 + 4\pi^2 x^2} = 0,$$

qui, intégrée, donne

$$(10)\qquad p^2 + 4\pi^2 x^2 = e^{-2\int \varphi(s)\,ds}.$$

Comme application de ces formules, nous chercherons d'abord quelle est la surface de révolution sur laquelle peut s'appliquer la surface de vis à filet carré.

Le profil générateur étant une droite perpendiculaire à l'axe, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

par suite

$$s = x \quad \text{et} \quad G = -\frac{4\pi^2 s}{p^2 + 4\pi^2 s^2}.$$

L'équation de la courbe méridienne de la surface de révolution cherchée est alors

$$(11)\qquad x = \frac{C}{p}\sqrt{p^2 + 4\pi^2 s^2}.$$

On reconnaîtra là l'équation des courbes dérivées de la chaînette, car, en posant $\frac{2\pi C}{p} = k$, $\frac{p}{2\pi} = h$, on peut la mettre sous la forme

$$x = k\sqrt{h^2 + s^2},$$

qui ne diffère que par le module k de l'équation de la chaînette

$$x = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

On obtient cette dernière équation en supposant $C = h$.

La surface de vis à filet carré n'est pas le seul héliçoïde applicable sur la surface de révolution qu'engendre la chaînette et que Bour a appelée *alysséide*.

Proposons-nous, en effet, de trouver le profil des héliçoïdes applicables sur l'alysséide.

Pour cette surface, la fonction $\varphi(s)$ qui exprime la courbure géodésique des parallèles est $-\frac{s}{h^2+s^2}$; par conséquent, l'équation (10) devient, dans ce cas,

$$p^2 + 4\pi^2 x^2 = m(h^2 + s^2),$$

m désignant une constante, d'où

$$s = \sqrt{\frac{4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2}{m}}$$

et

$$\frac{ds}{dx} = \frac{4\pi^2 x}{\sqrt{m}\sqrt{4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2}}.$$

Portant cette valeur de $\frac{ds}{dx}$ dans l'équation (8), on a

$$\frac{16\pi^4 x^2}{m(4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2)} = \frac{p^2 + 4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{p^2 + 4\pi^2 x^2},$$

d'où

$$(12)\quad dy = \frac{dx}{2\pi x\sqrt{m}}\sqrt{p^2+4\pi^2x^2}\sqrt{\frac{4\pi^2(4\pi^2-m)x^2-m(p^2-mh^2)}{4\pi^2x^2+p^2-mh^2}}.$$

Telle est l'équation différentielle du profil de l'hélicoïde.

Si l'on pose

$$x^2 = z,$$

d'où

$$dx = \frac{dz}{2x},$$

elle devient

$$dy = \frac{dz}{4\pi z\sqrt{m}}\,\frac{\sqrt{p^2+4\pi^2 z}\sqrt{4\pi^2(4\pi^2-m)z-m(p^2-mh^2)}}{\sqrt{4\pi^2 z+p^2-mh^2}}.$$

Sous cette forme, on voit que la valeur générale de y fournie par l'intégration renferme des transcendantes elliptiques.

Mais on n'a que des fonctions algébriques et logarithmiques dans les trois cas particuliers suivants :

1° $\qquad m = \dfrac{p^2}{h^2},$

2° $\qquad m = 4\pi^2,$

3° $\qquad m = \dfrac{2p\pi}{h}.$

Dans le premier cas, l'équation différentielle devient

$$dy = \frac{\sqrt{4\pi^2h^2-p^2}}{4p\pi}\,\frac{\sqrt{p^2+4\pi^2 z}}{z}\,dz;$$

dans le second,

$$dy = \frac{\sqrt{4\pi^2h^2-p^2}}{4\pi z}\,\frac{\sqrt{4\pi^2 z+p^2}}{\sqrt{4\pi^2 z+p^2-4\pi^2h^2}}\,dz;$$

dans le troisième,

$$dy = \frac{\sqrt{2\pi h - p}}{4\pi\sqrt{p}} \frac{4\pi^2 z + p^2}{z\sqrt{4\pi^2 z + p(p - 2\pi h)}} dz.$$

L'intégration s'effectue donc sans aucune difficulté; et, en faisant $p = 2\pi h$ dans les intégrales, elles se réduisent à $y + C = 0$, c'est-à-dire à celle d'une droite perpendiculaire à l'axe. On retrouve ainsi la surface de la vis à filet carré.