Nouvelles annales de mathématiques

A. Tissot

# Supplément au tome XIX. Année 1880

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 19 (1880), p. S1-S40 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__S1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.

---

SUPPLÉMENT

AU

# TOME XIX. — ANNÉE 1880

(DEUXIÈME SÉRIE)

# MÉMOIRE

## SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES (1),

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (2)].

### *Projections aphylactiques.*

95. *Projection des cartes plates carrées* (Tableau XX). — Les méridiens sont représentés par des droites parallèles entre elles, les parallèles par d'autres droites perpendiculaires aux premières. L'équateur et les méridiens se trouvent développés en vraie grandeur.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

96. *Projection de Cassini.* — On peut la définir en remplaçant, dans la projection précédente, l'équateur et les parallèles par un méridien convenu et par les petits cercles qui ont leurs plans parallèles à celui de ce méridien.

Le même Tableau est applicable, pourvu qu'on y considére $l$ comme représentant la distance sphérique d'un point quelconque du globe au méridien convenu.

97. *Projections des cartes plates parallélogrammatiques.* — Ces projections diffèrent de celle des cartes

(1) Pour ne pas fractionner encore cet important Mémoire de M. Tissot, ce que l'abondance des matières à insérer nous obligerait à faire, notre éditeur a bien voulu l'offrir en supplément aux abonnés des *Nouvelles Annales*. Nous l'en remercions ici bien vivement. CH. B.

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1879.

plates carrées en ce que le degré de longitude, au lieu d'être pris égal à celui de l'équateur, est mesuré sur un parallèle déterminé. Comme exemple, nous avons choisi celle dans laquelle le degré de l'équateur de la carte est égal à celui du parallèle de 45 degrés sur le globe (Tableau XXI).

98. *Projection stéréographique à cylindre du P. Braun* (Tableau XXII). — Le canevas ne diffère de celui de la projection de Mercator que par les distances mutuelles des parallèles de la carte. Il résulte du développement d'un cylindre circonscrit au globe le long de l'équateur, et sur lequel on a pris la perspective de chaque point, le point de vue se déplaçant sur l'équateur de manière à se trouver toujours sur le méridien du point considéré, mais dans l'autre hémisphère.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

99. *Projection de Mercator modifiée du P. Braun* (Tableau XXIII). — On l'obtient en rapprochant du centre le point de vue de la projection stéréographique à cylindre de manière que sa distance à ce centre ne soit plus que 0,4 du rayon.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

100. *Développements coniques* (Tableaux XXIV). — On imagine un cône ayant pour axe la ligne des pôles, et on le développe. Les plans des méridiens et ceux des parallèles coupent le cône suivant des génératrices et suivant des circonférences, dont les transformées figurent les méridiens et les parallèles de la carte. Nous avons considéré quatre de ces projections : dans la première, le cône a son sommet au pôle et pour base l'équateur; dans la seconde, il passe par les parallèles

de 15 et de 75 degrés; dans la troisième, il est déterminé par les parallèles qui ont pour latitudes 22° 30′ et 67° 30′; enfin, dans la quatrième, il est circonscrit au globe le long du parallèle de 45 degrés. Si l'on fait successivement

$$n' = 0, \quad n' = \tfrac{1}{3}, \quad n' = \tfrac{1}{2}, \quad n' = 1,$$

on pourra définir les quatre développements en disant que le cône contient les deux parallèles qui ont, l'un pour latitude, l'autre pour colatitude $\frac{n'\pi}{8}$. Les quatre angles au sommet sont droits.

101. *Développements de perspectives épiconiques.* — On prend les perspectives des divers points de la surface terrestre sur un cône de révolution dont l'axe coïncide avec la ligne des pôles, le point de vue étant situé sur cette ligne, puis on développe le cône.

Dans les *développements de perspectives gnomoniques épiconiques,* le point de vue est au centre du globe. Le Tableau XXV se rapporte à celle de ces projections dans laquelle le cône est circonscrit à la sphère suivant le parallèle de 30 degrés de latitude; on a choisi l'échelle de manière que les surfaces se trouvent conservées sur l'équateur.

Dans la *projection stéréographique à cône* du P. Braun, le point de vue est placé à l'un des pôles et le cône est le même que celui de la projection précédente. Sur le parallèle de 30 degrés de latitude, il ne se produit pas d'altération. Sur l'équateur, on a

$$a = 1{,}098, \quad b = 0{,}804, \quad 2\omega = 17°50',$$

et au pôle,

$$a = 3, \quad b = 1{,}5, \quad 2\omega = 38°57'.$$

102. *Projection stéréographique méridienne mo-*

*difiée* (Tableaux XXVI). — Les parallèles de la carte se tracent comme ceux de la projection stéréographique méridienne ; on obtient les méridiens en divisant la droite qui représente l'équateur en parties proportionnelles aux différences de longitude, puis en faisant passer des circonférences par les points de division et par les projections des deux pôles.

En chaque point, la plus grande altération d'angle ne dépend que de la longitude.

103. *Projection atractozonique* (Tableau XXVII). — Il est impossible de conserver partout les surfaces sur une projection dans laquelle les méridiens et les parallèles sont représentés par des cercles se coupant à angle droit; nous avons cherché à faire en sorte qu'il n'y ait d'altération ni dans les aires des zones comprises entre les parallèles, ni dans celles des fuseaux formés par les méridiens. Soit $l'$ l'angle au centre de l'arc intercepté, sur la circonférence qui limite la carte de l'hémisphère, par la projection de l'équateur et celle du parallèle de latitude $l$; soit $m'$ l'angle sous lequel se coupent la projection du méridien qui a pour longitude $m$ et celle du premier méridien; $l'$ et $m'$ seront fournis par les deux équations

$$\sin 2l' - 2l' \cos 2l' = \pi \sin l \sin^2 l',$$

$$2m' - \sin 2m' = 2m \sin^2 m',$$

qu'il est facile de réduire en Tables. Nous donnons les valeurs de $l'$ et $m'$ qui correspondent à des latitudes et à des longitudes multiples de 15 degrés.

104. *Projection polyconique rectangulaire des Américains* (Tableaux XXVIII). — Le premier méridien et l'équateur sont développés en vraie grandeur suivant deux droites perpendiculaires entre elles. Chaque paral-

lèle est représenté par un cercle dont le centre se trouve sur la première de ces deux droites, et dont le rayon est égal à la génératrice du cône circonscrit à la Terre suivant le parallèle. Les méridiens de la Carte sont des trajectoires orthogonales des cercles ainsi obtenus. Ces conditions donnent, pour les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la carte,

$$x = l + \frac{m^2 \sin 2l}{4 + m^2 \sin^2 l}, \quad y = \frac{4m \cos l}{4 + m^2 \sin^2 l}.$$

Dans les projections aphylactiques qui ont été examinées jusqu'à présent, les méridiens et les parallèles de la carte se coupent à angle droit; il n'en sera plus de même dans les suivantes, si ce n'est dans les projections centrales sous l'aspect polaire, que nous étudierons en dernier lieu.

105. *Projection d'Apianus* (Tableaux XXIX). — Les parallèles de cette projection sont les mêmes que ceux des cartes plates. Le premier méridien est représenté par une droite, et celui qui limite l'hémisphère, par la circonférence décrite sur cette droite comme diamètre. Les autres demi-méridiens ont pour projections des arcs de cercle divisant l'équateur rectiligne de la carte en parties proportionnelles aux différences de longitude.

Les angles et les distances sont conservés le long de l'équateur.

Les deux Tableaux se rapportent au premier et au dernier méridien.

106. *Projection polyconique ordinaire des Américains* (Tableaux XXX). — Le premier méridien se développe en vraie grandeur suivant une droite. Les paral-

lèles de la carte sont des circonférences ayant leurs centres sur cette droite, et pour rayons les génératrices des cônes circonscrits au globe suivant les parallèles eux-mêmes. Sur ces circonférences on porte des longueurs égales aux arcs des parallèles terrestres, d'où résulte le tracé par points des projections des divers méridiens.

On a partout $k = 1$. Dans la représentation d'un hémisphère, le maximum de $\theta$ est $7°56'$; il a lieu pour $l = 41°41'$, $m = 90°$. Le minimum de $b$ est 0,9844; il a lieu pour $l = 47°$, $m = 90°$.

107. *Projection de Loritz* (Tableaux XXXI). — Les méridiens sont ceux de la projection d'Apianus, et les parallèles, ceux de la projection orthographique.

Les altérations ont les mêmes valeurs pour tous les points de l'équateur.

108. *Projection de Nicolosi* (Tableaux XXXII). — Les méridiens sont ceux de la projection d'Apianus. Les parallèles sont aussi des circonférences; ces dernières passent par les points qui divisent le premier méridien et les deux demi-méridiens extrêmes en parties proportionnelles aux différences de latitude.

Soient Q la distance au centre de la carte du centre de l'une des circonférences qui forment le canevas, et R le rayon de cette circonférence, le rayon du méridien extrême étant pris pour unité : nous donnons les valeurs de Q et de R pour les parallèles de 5 en 5 degrés de latitude et pour les méridiens de 5 en 5 degrés de longitude, les valeurs de $\theta$ pour les points d'intersection de ces méridiens et de ces parallèles, enfin celles de $h$, de $k$ et des éléments $2\omega$, $a$, $b$, S, $(a)$, $\omega$, mais de 15 en 15 degrés seulement.

109. *Projection de l'*Astronomie populaire *d'Arago*

(Tableaux XXXIII). — Les méridiens de la carte sont ceux de la projection de Mollweide, et les parallèles, ceux des cartes plates carrées.

Les rapports de surfaces sont indépendants des longitudes.

110. *Seconde projection du P. Fournier* (Tableaux XXXIV). — Les méridiens de la carte sont ceux qui ont été adoptés depuis par Mollweide. Les parallèles sont les mêmes que dans la projection orthographique.

Les rapports de surfaces ne dépendent que de la latitude.

Les altérations ont les mêmes valeurs pour tous les points de l'équateur.

111. *Première projection du P. Fournier* (Tableaux XXXV). — Le canevas est formé par les méridiens elliptiques de la projection précédente et les parallèles de celle de Nicolosi.

112. *Projection de Schmidt* (Tableaux XXXVI). — Les méridiens de la carte sont les ellipses des projections du P. Fournier. Pour tracer les parallèles, on divise les périmètres de ces ellipses en parties proportionnelles aux différences de latitude, et l'on joint, par un trait continu, les points de division correspondants.

Au centre de la carte, il n'y a pas d'altération.

113. *Projection polyconique équidistante.* — Le parallèle moyen et les méridiens de la carte se tracent comme dans la projection polyconique ordinaire. Sur chacun de ces méridiens, on prend ensuite, à partir du parallèle moyen, des longueurs égales aux arcs de méridien du globe, ce qui permet de construire les parallèles par points.

Si le pôle figure sur la carte, il y sera représenté, non par un point, mais par un arc de courbe.

114. *Projection de Guillaume Postel sur un méridien* (Tableaux XXXVII). — C'est la projection centrale dans laquelle les distances sphériques des petits cercles perpendiculaires à la verticale se trouvent conservées sur la carte. On y a, en chaque point,

$$b = 1, \quad S = a.$$

115. *Projection gnomonique méridienne* (Tableaux XXXVIII). — La projection gnomonique est la perspective prise du centre de la sphère, de sorte que tout grand cercle y est représenté par une droite.

116. *Perspective périmécoïque sur un méridien* (Tableaux XXXIX). —Nous avons trouvé que pour réduire à son *minimum* la plus grande altération de longueur dans la perspective d'un hémisphère, il faut placer le point de vue en dehors de l'hémisphère non représenté, et à une distance du centre égale au côté du décagone régulier étoilé inscrit dans un grand cercle.

117. *Projection de La Hire sur un méridien* (Tableaux XL). — C'est une perspective dans laquelle le point de vue se trouve en dehors de la sphère, et à une distance de la surface égale au sinus de 45 degrés.

118. *Perspective périhalique méridienne* (Tableaux XLI). — Nous avons trouvé que, pour réduire à son minimum la plus grande altération de surface dans la perspective d'un hémisphère, il faut placer le point de vue en dehors de l'hémisphère non représenté, et à une distance de la surface égale à 1,148, l'unité étant le rayon terrestre.

119. *Projection orthographique méridienne* (Tableaux XLII). — C'est la projection orthogonale ordinaire de la Géométrie descriptive.

On a, en chaque point,

$$a = 1, \quad S = b, \quad \Sigma = \beta.$$

## *Projections centrales.*

120. *Projections de Lambert, de Guillaume Postel et de M. Airy* (Tableaux XLIII). — Nous avons dit que, pour étudier la déformation produite par les projections centrales, il suffit de les considérer sous l'aspect polaire. L'une d'elles conserve les angles : c'est la projection stéréographique ; une autre conserve les surfaces : c'est la projection de Lambert. Les Tableaux relatifs à ces deux dernières figurent déjà parmi ceux des projections autogonales ou parmi ceux des projections authaliques ; néanmoins nous les reproduisons ici afin de les rapprocher de ceux des autres projections centrales.

En laissant d'abord de côté les perspectives, nous avons à nous occuper de la projection authalique de Lambert, de la projection de Guillaume Postel et de la projection de M. Airy. Celle-ci est la seule dont nous n'ayons pas encore donné la définition : La circonférence qui représente le parallèle de colatitude $\delta$ y a pour rayon

$$\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} + 2\cot\frac{\delta}{2}\log\operatorname{séc}\frac{\delta}{2},$$

les logarithmes étant ceux du système népérien.

121. *Perspectives* (Tableaux XLIV). — Pour qu'une perspective se prête à la représentation d'un hémisphère tout entier, sans qu'il y ait recouvrement, il faut que le point de vue se trouve au delà du centre par rapport au

pôle de cet hémisphère. En le plaçant au pôle opposé, on obtient la projection stéréographique, qui conserve les angles. Si on l'écarte de cette position, soit en le rapprochant du centre, soit en l'éloignant dans le sens opposé, les altérations d'angles deviennent de plus en plus fortes, tandis que les altérations de surfaces augmentent dans le premier cas, et diminuent dans le second. A l'exception de la projection gnomonique, qui a un but spécial, nous devions donc nous borner à considérer les perspectives dans lesquelles le point de vue se trouve sur le prolongement du rayon mené au pôle de l'hémisphère non représenté. Chacune sera caractérisée par la distance correspondante, D, du centre au point de vue, distance que nous évaluerons en prenant le rayon pour unité. Les perspectives que nous avons étudiées sont les suivantes :

*Projection gnomonique;* $D = 0$.
*Projection stéréographique;* $D = 1$.
*Projection du capitaine Clarke;*

$$D = 1 + \frac{11}{30} = 1{,}3666\ldots$$

*Projection de Sir Henri James;* $D = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$.

*Perspective qui correspond à* $D = \frac{\pi}{2} = 1{,}57079\ldots$

*Première projection de Parent;* $D = 1{,}595$.
*Perspective qui correspond à* $D = 1{,}6$.
*Perspective périmécoïque;*

$$D = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1{,}6180\ldots$$

*Projection de Lowry;* $D = 1{,}69$.
*Projection de La Hire;* $D = 1 + \sin 45° = 1{,}7071\ldots$

*Deuxième projection de Parent ;*

$$D = \sqrt{3} = 1,7321\ldots,$$

*Perspective qui correspond à* D = 2.
*Perspective qui correspond à* D = 2, 1.
*Troisième projection de Parent ;* D = 2, 105.
*Perspective qui correspond à*

$$D = 2 + \frac{1}{10}\sqrt{2} = 2,1414\ldots$$

*Perspective périhalique ;* D = 2, 148.
*Perspective qui correspond à*

$$D = 1 + \sqrt{3} = 2,7321\ldots.$$

*Projection orthographique ;* D = $\infty$.

Dans le dernier des Tableaux XLIV, $\delta_\mu$ représente la valeur de $\delta$ pour laquelle S atteint son *maximum,* et $S_\mu$ la valeur de ce *maximum.*

La perspective périmécoïque diffère peu de celle qui correspond à D = 1,6.

On obtiendrait, sans erreur sensible, la perspective périhalique en plaçant le point de vue à une distance de la surface de la sphère égale au rayon augmenté de la dixième partie du côté du carré inscrit dans un grand cercle.

**122.** Les Tableaux XLV donnent, pour la projection centrale authalique de Lambert, pour la projection de Guillaume Postel, pour la projection stéréographique, pour la perspective périmécoïque et pour la perspective périhalique, les valeurs des éléments $2\omega$, $a$, $b$, S, etc.... qui correspondent à des colatitudes multiples de 5 degrés.

**123.** Les groupes de Tableaux I à XLV permettent d'étudier les déformations produites par les divers modes de projection, de comparer ces modes de projection entre eux, enfin de choisir, suivant le but qu'on se propose, celui qu'il convient d'adopter pour la représentation d'un hémisphère. Nous reviendrons sur ce dernier point à la fin du Chapitre suivant.

---

## CHAPITRE IV.

**Résultats numériques relatifs aux cartes de portions du globe moindres qu'un hémisphère. — Choix d'un mode de projection.**

### *Résultats numériques.*

**124.** Les groupes de Tableaux I à XLV sont à la rigueur suffisants pour l'étude de la déformation produite par les divers modes de projection dans la représentation d'un hémisphère, car en général ils font connaître les éléments de cette déformation pour 145 points particuliers. S'il s'agit d'étudier un mode de projection en vue de la représentation d'une région de moindre étendue, on puisera, dans les mêmes Tableaux, les éléments de la déformation pour ceux d'entre les 145 points qui se trouveront situés à l'intérieur de cette région, et de cette manière on se procurera encore des notions précises sur la déformation produite; mais ici ces notions seront insuffisantes, parce qu'elles se rapporteront à des points relativement trop éloignés les uns des autres et trop éloignés aussi des limites de la région. Si nombreuses qu'elles soient, les valeurs que nous avons données précédemment et celles que nous leur ajouterons bientôt ne le sont donc pas encore assez, et il y aurait utilité à en calculer beaucoup d'autres. Le travail ne sera complet qu'autant que les résultats obtenus permettront de tracer sur des cartes à grande échelle, et pour chaque mode de projection, des courbes d'égales altérations suffisamment rapprochées. A la fin du Chapitre, nous reviendrons sur la construction de ces cartes et l'usage que l'on peut en faire dans le choix d'un système de projection.

Nous avons dit que la plupart des projections étaient susceptibles d'être réparties en groupes dans lesquels elles se distinguent les unes des autres par les valeurs attribuées à un paramètre; chaque groupe comprend ainsi une infinité de projections, et il serait impossible d'effectuer pour toutes le travail que nous avons indiqué tout à l'heure; mais il suffira de considérer un certain nombre d'entre elles. On a vu par exemple, dans le groupe des perspectives, qu'il y avait lieu de se borner à celles pour lesquelles la distance du point de vue au centre de la sphère se trouve comprise entre deux limites assez voisines, et que les altérations ne variaient pas très rapidement avec cette distance.

Dans chaque groupe, il y a surtout intérêt à déterminer les projections qui sont périgonales, périmécoïques où périhaliques pour les cartes de certaines portions du globe, c'est-à-dire celles qui produisent sur ces cartes, pour les altérations d'angles, de longueurs ou de surfaces, des *maxima* moins élevés que les autres projections du même groupe. C'est ce que nous avons fait dans le Chapitre précédent pour la carte d'un hémisphère et ce que nous ferons dans celui-ci pour les cartes de zones d'une moindre étendue. Les solutions seront réunies en Tableaux ainsi que les altérations *maxima* correspondantes. D'autres Tableaux feront connaître les valeurs des éléments de la déformation, calculées de 5 en 5 degrés, pour un certain nombre des projections obtenues. Nous joindrons à ces renseignements quelques résultats numériques relatifs à d'autres projections.

**125.** *Projections coniques autogonales* (Tableaux XLVI). — Dans les projections autogonales à méridiens rectilignes ou à méridiens circulaires, nous avons désigné par $n$ le rapport constant de l'angle de deux méridiens de la Carte à l'angle correspondant du globe (n° 75). Les valeurs $\frac{2}{3}$, 0,8 et 0,807 attribuées à $n$ déterminent respectivement trois projections coniques autogonales qui sont péribaliques, et par conséquent aussi périmécoïques, pour les trois zones comprises, la première entre l'équateur et le parallèle de 75 degrés de latitude, la seconde entre les parallèles de 40 et de 65 degrés, la troisième entre les parallèles de 35 et de 70 degrés. Sur la carte de cette dernière zone, l'angle des demi-méridiens extrêmes est de 288 degrés et le parallèle le long duquel les altérations se trouvent nulles a pour latitude 53° 48′ 10″; nous avons donné dans le Chapitre III les nombres analogues relatifs aux deux autres zones.

**126.** *Projections autogonales à méridiens circulaires* (Tableaux XLVII). — On a vu (n° 76) que dans la représentation d'un hémisphère limité par un méridien, le rapport de longueurs et le rapport de surfaces augmentent avec la longitude. La manière dont ils varient avec la latitude sur le méridien rectiligne de la carte dépend de $n$ : pour les valeurs de $n$ non supérieures à un, $a$ augmente de l'équateur au pôle; pour les quatre valeurs qui suivent dans celles que nous avons considérées, $a$ augmente d'abord, puis diminue jusqu'à zéro; enfin, pour les six dernières, $a$ diminue constamment de l'équateur au pôle. Si, dans la représentation de l'hémisphère, on fait abstraction des deux calottes sphériques que limitent les parallèles de 75 degrés de latitude, la plus faible valeur de $a$ correspondra, dans les huit dernières projections, à $l = 75$ degrés, $m = 0$; c'est pourquoi nous l'avons prise comme unité, et nous avons reproduit, avec cette modification, les huit dernières lignes des Tableaux VI.

127. *Projections cylindriques authaliques* (Tableaux XLVIII). — Nous considérons celles de ces projections qui sont périgonales pour les zones limitées par deux parallèles dont les latitudes $l'$, $l''$ sont des multiples de 10 degrés inférieurs à 40 degrés. Nos Tableaux, qui sont à double entrée, donnent les valeurs correspondantes de $n$ (n° 81), de $\frac{1}{n}$, de la latitude $l_0$ du parallèle le long duquel il n'y a pas d'altération, ainsi que les *maxima* de $2\omega$, de $a$, de $(a)$ et enfin les *minima* de $b$, pour toute l'étendue de la carte. Ainsi qu'on pourra le voir par les Tableaux du numéro suivant, quelques-unes de ces projections sont moins avantageuses que les projections coniques authaliques; il en serait ainsi, à plus forte raison, pour des zones contenant des points situés à plus de 40 degrés de l'équateur.

128. *Projections coniques authaliques* (Tableaux XLIX). — Nous appelons $\delta'$, $\delta''$ les colatitudes des parallèles extrêmes de la zone pour laquelle chaque projection est périgonale; $\delta_0$ est celle du parallèle le long duquel ne se produit aucune altération. Le paramètre $n$ est égal à $\cos^2\frac{\delta_0}{2}$; il varie ici de 1 à $\frac{1}{2}$; les valeurs de $\frac{1}{n}$ qui correspondent à des zones à une seule base sont les mêmes que celles de $(a)$ dans la première ligne ou dans la première colonne de l'avant-dernier Tableau. Le dernier Tableau se rapporte à quelques zones non comprises dans les Tableaux précédents.

**129.** *Projections tronconiques authaliques.* — Les plus grandes altérations d'angles et de longueurs sont les mêmes dans la projection tronconique authalique qui est périgonale pour la zone comprise entre les deux parallèles de colatitudes $\delta'$, $\delta''$, et dans la projection conique authalique qui est périgonale pour la zone à une base limitée par le parallèle de colatitude $\delta'' - \delta'$. Nous renverrons donc ici, pour les valeurs *maxima* de $a$ et de $2\omega$ aux Tableaux qui ont été donnés à propos des projections coniques authaliques.

Dans la projection tronconique authalique qui est périgonale pour la zone comprise entre les parallèles de colatitude $\delta'$, $\delta''$, le rapport $a$ est égal à l'unité sur deux parallèles intermédiaires dont nous désignerons les colatitudes par $\delta_0$ et $\delta_1$; ce même rapport atteint sa plus grande valeur $a_\mu$ sur un parallèle dont la colatitude $\delta_\mu$ est intermédiaire entre $\delta_1$ et $\delta_0$, et cette plus grande valeur est précisément égale à celle que prend $a$ sur les deux parallèles extrêmes. Lorsque $\delta$ augmente de $\delta'$ à $\delta_0$, $a$ diminue de $a_\mu$ à l'unité; $\delta$ augmentant de $\delta_0$ à $\delta_\mu$, $a$ augmente de 1 à $a_\mu$; $\delta$ augmentant de $\delta_\mu$ à $\delta_1$, $a$ diminue de $a_\mu$ à l'unité; enfin, $\delta$ augmentant de $\delta_1$ à $\delta''$, $a$ augmente de 1 à $a_\mu$. La plus grande altération d'angle $2\omega$ varie d'ailleurs dans le même sens que $a$, et son maximum $2\omega_\mu$ se produit en même temps que celui de $a$. Les colatitudes sont d'ailleurs comptées à partir de celui des deux pôles pour lequel $\delta' + \delta''$ est plus petit que $\pi$.

Le *maximum* $a_\mu$ est nécessairement moins élevé ici que dans la projection conique authalique qui serait périgonale pour la même zone, car, dans les projections tronconiques, on dispose de deux paramètres, savoir, le rapport constant $n$ de l'angle de deux méridiens de la carte à celui des méridiens correspondants du globe, et le rayon $\rho$ de la circonférence par un arc de laquelle le pôle se trouve remplacé sur la carte. Les deux projections se confondent dans le cas seulement où la zone que l'on considère est à une base, c'est-à-dire pour $\delta' = 0$. Quand $\delta'$ et $\delta''$ sont supplémentaires, c'est-à-dire quand les deux parallèles extrêmes sont égaux, la projection tronconique se transforme en une projection cylindrique authalique, savoir celle qui est périgonale pour la zone comprise entre l'équateur et l'un des deux parallèles. Voici quelques exemples.

*Premier exemple.*

$$\delta' = 15^\circ, \qquad \delta_{,,} = 25^\circ\ 3'\,20'', \qquad n = 0,1736,$$
$$\delta'' = 145^\circ, \qquad \delta_{,} = 73^\circ 57'\,30'', \qquad \rho = 2,2054,$$
$$a_\mu = 1,538, \qquad \delta_\mu = 65^\circ 44'\,20'', \qquad 2\omega_\mu = 47^\circ 33'.$$

*Deuxième exemple.*

$$\delta' = 15^\circ, \qquad \delta_{,,} = 19^\circ 50'\,50'', \qquad n = 0,6088,$$
$$\delta'' = 90^\circ, \qquad \delta_{,} = 73^\circ 55'\,30'', \qquad \rho = 0,3404,$$
$$a_\mu = 1,123. \qquad \delta_\mu = 39^\circ 53'\,10'', \qquad 2\omega_\mu = 13^\circ 14'.$$

*Troisième exemple.*

$$\delta' = 15^\circ, \qquad \delta_{,,} = 18^\circ\ 6'\,30'', \qquad n = 0,8192,$$
$$\delta'' = 55^\circ, \qquad \delta_{,} = 46^\circ 32'\,30'', \qquad \rho = 0,1518,$$
$$a_\mu = 1,032, \qquad \delta_\mu = 29^\circ 20'\,30'', \qquad 2\omega_\mu = 3^\circ 34'.$$

*Quatrième exemple.*

$$\delta' = 55^\circ, \qquad \delta_{,,} = 64^\circ 50'\,0'', \qquad n = 0,$$
$$\delta'' = 125^\circ, \qquad \delta_{,} = 115^\circ 10'\,0'', \qquad \rho = \infty,$$
$$a_\mu = 1,105, \qquad \delta_\mu = 90^\circ\ 0'\,0'', \qquad 2\omega_\mu = 11^\circ 25'.$$

Comme les deux parallèles extrêmes sont également distants de l'équateur, on a ici une projection cylindrique.

*Cinquième exemple.*

$\delta' = 15^{\circ}$, $\quad \delta_0 = 19^{\circ}\ 4'50''$, $\quad n = 0{,}7071$,
$\delta'' = 75^{\circ}$, $\quad \delta_1 = 62^{\circ}\ 1'20''$, $\quad \rho = 0{,}8774$,
$a_\mu = 1{,}075$, $\quad \delta_\mu = 35^{\circ}15'50''$, $2\omega_\mu = 8^{\circ}\ 14'$.

*Sixième exemple.*

$\delta' = 35^{\circ}$, $\quad \delta_0 = 42^{\circ}37'50''$, $\quad n = 0{,}3420$,
$\delta'' = 105^{\circ}$, $\quad \delta_1 = 92^{\circ}57'50''$, $\quad \rho = 1{,}5414$,
$a_\mu = 1{,}105$, $\quad \delta_\mu = 65^{\circ}19'20''$, $2\omega_\mu = 11^{\circ}25'$.

Quand on fait abstraction des terres situées au delà du 75^e^ degré de latitude nord, la première des zones que nous venons de prendre comme exemples renferme tous les continents, la deuxième l'Asie, la troisième l'Europe, la quatrième l'Afrique, la cinquième l'Amérique du Nord et la sixième l'Amérique du Sud, les colatitudes étant comptées, pour cette dernière, à partir du pôle austral. Mais il est clair que, si l'on voulait appliquer les projections d'Albers à la représentation de l'Afrique ou à celle de l'une des deux Amériques, ce n'est pas à l'un des pôles géographiques qu'il faudrait placer le pôle de la projection ; en choisissant convenablement ce dernier point on atténuerait notablement les valeurs des plus grandes altérations ; seulement on ne pourrait les rendre que de très-peu inférieures à celles que produisent les projections coniques authaliques, ainsi qu'on s'en convaincra en examinant la forme de chacune des trois portions de la surface terrestre dont nous venons de parler.

**130.** *Projection dite de Bonne* (Tableau L).

**131.** *Projection polyconique ordinaire des Améri-*

*cains*. — Lorsqu'on l'applique à la carte de France, en prenant le méridien de Paris comme méridien moyen, on trouve que les plus fortes altérations se produisent vers l'île d'Ouessant (longitude 7°,5, latitude 48°,5). En ce point l'angle le plus altéré l'est de 13 minutes; la plus grande altération de longueur y est égale à 0,0038 ou $\frac{1}{266}$, et l'altération de surface y est représentée par le même nombre.

132. *Perspectives périmécoïques pour diverses zones à une seule base* (Tableau LI) — Nous donnons d'abord les distances D du point de vue au centre de la sphère pour les calottes dont les rayons sphériques, $\Delta$, sont des multiples de 5 degrés, jusqu'à 50 degrés, puis les éléments de la déformation pour les perspectives qui correspondent aux rayons de 10, 20, 25, 30, 40 et 50 degrés.

133. *Perspectives périhaliques pour les mêmes zones* (Tableaux LII). — Dans le premier Tableau, $\delta_\mu$ représente la distance polaire du parallèle sur lequel se produit le *maximum* $S_\mu$ de S.

*Choix d'un mode de projection.*

134. Certaines cartes construites en vue d'un but spécial exigent un mode de projection déterminé : ainsi, les conditions auxquelles doivent satisfaire les cartes marines ne se trouvent remplies que dans le système de Mercator; pour que les cartes de la Lune représentent cet astre tel que nous le voyons, il faut les tracer à l'aide de la projection orthographique; on aura recours à la projection gnomonique si l'on veut transformer en lignes droites toutes les circonférences de grands cercles. Dans

ces divers cas, on n'a pas à se préoccuper de choisir un mode de projection plutôt qu'un autre en vue de diminuer la déformation.

La plupart du temps, au contraire, une carte géographique n'a d'autre objet que de représenter assez fidèlement une portion de la surface terrestre; en adoptant un système de projection convenable, on peut alors atténuer les altérations dans certaines régions de la carte, ou bien les atténuer et même les détruire sur certaines lignes, ou bien encore faire en sorte qu'elles n'atteignent nulle part des valeurs trop considérables. Le choix dépendra de celles de ces conditions auxquelles on attribuera le plus d'importance; il variera nécessairement avec la forme et l'étendue de la contrée dont il s'agit de dresser la carte.

135. Supposons qu'on n'ait aucune raison d'atténuer la déformation en certains points plutôt que dans les autres, mais que l'on se propose d'abaisser la limite supérieure à laquelle elle peut atteindre; supposons de plus que la portion du globe à représenter soit un hémisphère entier. Les conditions ainsi énoncées excluent tout d'abord les projections dans lesquelles la circonférence de grand cercle qui limite l'hémisphère ne serait pas figurée sur la carte par la totalité d'un contour fermé; elles excluent entre autres les projections cylindriques et coniques, où certains points très-éloignés les uns des autres sur la carte correspondent à des points de la surface terrestre infiniment voisins. Cependant, bien que ramenée à des termes déjà plus précis, la question en comprend encore plusieurs autres : ou bien on voudra conserver les angles et réduire autant que possible la plus grande altération de surface; ou bien on voudra conserver les surfaces et réduire autant que pos-

sible la plus grande altération d'angle; ou bien enfin on voudra réduire autant que possible la plus grande altération de longueur.

136. Des projections autogonales connues, la projection stéréographique est la seule dans laquelle le rapport de longueurs, et par conséquent le rapport de surfaces, conservent partout des valeurs finies; elle répond donc seule à la question dans le premier des trois cas qui viennent d'être spécifiés.

137. Dans le second cas, il s'agit de projections authaliques. Imaginons que les dimensions du globe se trouvent réduites de manière que les aires mesurées sur la carte soient, non plus seulement proportionnelles, mais égales à celles des régions correspondantes, et prenons alors le rayon terrestre pour unité; l'aire totale de la carte sera mesurée par $2\pi$, et son périmètre, d'après la propriété que possède le cercle de contenir la plus grande surface avec un contour de longueur donnée, sera au moins égal à la circonférence du cercle dont l'aire est $2\pi$, c'est-à-dire à $2\pi\sqrt{2}$. D'après nos conditions, la totalité de la courbe qui forme ce périmètre remplace sur la carte une circonférence de grand cercle ayant pour longueur $2\pi$; les rapports de longueurs suivant les directions des éléments de cette courbe sont donc tous égaux à $\sqrt{2}$, ou bien les uns sont plus petits et, par compensation, les autres plus grands que $\sqrt{2}$; dans tous les cas, il y a des points pour lesquels le demi-grand axe de l'ellipse indicatrice est au moins égal à $\sqrt{2}$, ce qui exige que le demi-petit axe soit au plus égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et que le rapport du premier au second soit au moins égal à 2; pour

$a = \sqrt{2}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la formule

$$\sin\omega = \frac{a-b}{a+b}$$

donnerait d'ailleurs

$$\sin\omega = \frac{1}{3},\quad \omega = 19^\circ 28' 16'',\quad 2\omega = 38^\circ 56' 33'';$$

ainsi le *maximum* de $(a)$, c'est-à-dire le rapport de la longueur la plus amplifiée à la longueur la plus réduite ne peut être inférieur à 2, et la plus grande altération d'angle ne peut être inférieure à $38^\circ 56' 33''$. Ces deux valeurs sont précisément les plus grandes que fournisse la projection centrale de Lambert, tandis que les autres projections authaliques non exclues jusqu'ici en fournissent de plus grandes encore. Actuellement, la projection centrale de Lambert est donc la seule qui réponde à la question, et même, quelles que soient les projections authaliques que l'on vienne plus tard à imaginer pour la représentation d'un hémisphère, aucune n'abaissera plus que celle-là les limites supérieures des altérations, tant que l'on s'astreindra à figurer par la totalité d'une courbe fermée la circonférence de grand cercle qui limite l'hémisphère.

138. Cette dernière condition subsiste encore dans le troisième cas que nous avons à considérer, mais il n'est plus nécessaire que le mode de projection soit ni autogonal ni authalique.

Quel que soit ce mode de projection, il est impossible que le rapport de la longueur la plus amplifiée ou la moins réduite à la longueur la plus réduite ou la moins amplifiée soit plus petit que $\frac{\pi}{2}$.

En effet, supposons que l'on ait diminué les dimensions du globe terrestre jusqu'à ce que son rayon soit devenu égal à la plus courte distance de la projection du pôle de l'hémisphère au contour de la carte, et prenons cette distance comme unité. La portion de droite sur laquelle on la mesure est la projection d'une portion de courbe au moins égale en longueur au quart d'une circonférence de grand cercle, c'est-à-dire à $\frac{\pi}{2}$; le plus petit rapport de longueurs est donc au plus égal à $\frac{2}{\pi}$. D'un autre côté, le contour de la carte enveloppe la circonférence qui a pour centre la projection du pôle de l'hémisphère et pour rayon l'unité, à moins qu'il ne se confonde avec elle; sa longueur est donc au moins égale à celle de la circonférence de grand cercle dont il est la projection; par conséquent, le plus grand rapport de longueurs est au moins égal à 1. De là il résulte que la plus grande valeur de $(a)$ est au moins égale à $\frac{\pi}{2}$, ainsi que nous l'avions annoncé. La projection de Guillaume Postel donne précisément $\frac{\pi}{2}$ pour la plus grande valeur de $a$ dans la représentation d'un hémisphère, et partout $b$ y est égal à 1, tandis que les autres projections nous ont donné pour la plus grande valeur de $(a)$ des nombres plus grands que $\frac{\pi}{2}$. La projection de Guillaume Postel répond donc ici à la question, et même il serait impossible d'en imaginer une autre qui fournisse une valeur moindre pour la plus grande altération de longueur.

**139.** Il peut se faire que l'on désire obtenir une altération d'angle *maxima* plus petite que celle de la projection de Guillaume Postel en même temps qu'une altération de surface *maxima* plus petite que celle de la projection stéréographique, ou bien encore une altération de surface *maxima* plus petite que celle de la projection de Guillaume Postel en même temps qu'une altération d'angle *maxima* plus petite que celle de la projection centrale de Lambert. Les projections qui remplissent l'une ou l'autre de ces deux conditions sont la projection de M. Airy, celle de Nicolosi et toutes les perspectives pour lesquelles le point de vue se trouve en dehors de la sphère à une distance de la surface moindre que le rayon. En consultant les Tableaux qui leur sont relatifs, on pourra trouver, dans la manière dont la déformation se répartit entre les diverses régions de l'hémisphère, des motifs d'adopter une de ces projections plutôt que les autres; mais, si l'on continue à considérer surtout les valeurs extrêmes des altérations, on devra rejeter la projection de Nicolosi ainsi qu'une partie des perspectives comme donnant à la fois, pour les trois sortes d'altérations, des *maxima* plus élevés que d'autres projections. Celles qui resteront sont la projection de M. Airy, les perspectives pour lesquelles la distance D du point de vue au centre est plus petite que 1,296, et celles pour lesquelles la même distance est comprise entre 1,360 et $\frac{\pi}{2}$ ou entre 1,645 et 2. Ces conclusions se trouvent justifiées par le Tableau suivant et par cette considération que, dans les perspectives pour lesquelles D est compris entre 1 et 2,148, la plus grande valeur de l'altération d'angle augmente, et la plus grande valeur de l'altération de surface diminue, à mesure que D augmente.

| NOMS DES PROJECTIONS. | VALEURS MAXIMA DE | | |
|---|---|---|---|
| | $2\omega$. | $(a)$. | S. |
| | ° ′ | | |
| Projection stéréographique......... | 0. 0 | 2,000 | 4,000 |
| Perspective ($D = 1,296$)............ | 14.48 | 1,772 | 2,442 |
| Projection de M. Airy............... | 14.48 | 1,693 | 2,213 |
| Perspective ($D = 1,361$)............ | 17.36 | 1,735 | 2,211 |
| Perspective $\left(D = \frac{\pi}{2}\right)$.............. | 25.39 | 1,637 | 1,706 |
| Projection de G. Postel.............. | 25.39 | 1,571 | 1,571 |
| Perspective ($D = 1,646$)............ | 28.16 | 1,646 | 1,570 |
| Projection de Nicolosi.............. | 32.47 | 1,787 | 1.571 |
| Perspective ($D = 2$)................ | 38.57 | 2,000 | 1,125 |
| Projection centrale de Lambert...... | 38.57 | 2,000 | 1,000 |

**140.** Ainsi qu'on devait le prévoir par des raisons de symétrie, les projections remplissant les conditions que nous nous étions imposées relativement à la déformation sont des projections centrales; elles remplacent les méridiens par des droites et les parallèles par des circonférences, lorsque le pôle de l'hémisphère à représenter se confond avec le pôle géographique; dans le cas contraire, les deux mêmes séries de lignes se trouvent figurées par des circonférences sur la projection stéréographique, et sur les autres, par des ellipses, des courbes du quatrième degré ou des courbes transcendantes. Nous avons indiqué autrefois (¹) un procédé pour le tracé par points des méridiens et des parallèles d'une projection centrale, le canevas de la projection stéréographique servant de canevas auxiliaire; il serait plus commode et plus exact de faire usage de Tables donnant les coordonnées rectangulaires de chaque point de la carte d'après la longitude et la latitude du point correspondant du globe;

(¹) *Cosmos*, année 1865.

le calcul de ces Tables ne présente aucune difficulté; mais il est encore à faire, du moins en grande partie.

En chaque point d'une projection centrale, on peut obtenir immédiatement les directions des axes de l'ellipse indicatrice, puisque l'un d'eux se trouve sur la droite qui joint le centre de la carte au point considéré; quant à leurs longueurs, elles ne dépendent que de la longueur de cette droite et sont fournies par nos Tableaux. Il est donc facile, en partant des indications de la carte et en appliquant les propriétés du Chapitre I, de rétablir, soit graphiquement, soit par le calcul, les directions telles qu'elles émanent du point correspondant du globe, ainsi que les longueurs des arcs très-petits qui ont ce point pour origine. On pourra aussi tracer et déterminer en vraie grandeur le plus court chemin d'un point à un autre, pourvu qu'à la carte dont on fait usage on en joigne une autre construite d'après la projection gnomonique. Sur cette dernière, on tirera, entre les deux points, une ligne droite, que l'on décomposera en éléments assez petits; puis l'on mesurera chaque élément sur l'une ou l'autre projection en tenant compte des altérations éprouvées. La projection gnomonique exige quatre cartes pour la reproduction de la totalité de la surface terrestre.

141. Comme il y a peu d'intérêt à représenter les régions polaires exactement, il est permis de faire abstraction des points qu'elles renferment jusqu'à 15 degrés du pôle par exemple; au lieu d'un hémisphère limité par un méridien, on aura à considérer une portion du globe comprise entre ce méridien et deux moitiés des parallèles de 75 degrés de latitude. Au premier abord, il semble qu'en reprenant, dans ces conditions, la comparaison qui vient d'être effectuée, on sera conduit à choisir des modes de projection plus avantageux; un

examen attentif de nos Tableaux montre qu'il n'en est rien. En effet, la projection stéréographique méridienne modifiée donne seule alors une altération d'angle *maxima* moindre que celle de la projection centrale de Lambert, en même temps qu'un rapport *maximum* de surfaces moindre que celui de la projection stéréographique; mais ces deux *maxima* et celui de ($a$), qui ont respectivement pour valeurs 16° 19′, 2,524 et 2,023, sont tous trois plus élevés que ceux de la projection de M. Airy.

142. Nous avons exclu tout d'abord les projections coniques parce que, sur ces projections, les deux rayons qui limitent le secteur de la carte proviennent en réalité du dédoublement d'un même quart de circonférence de grand cercle, comme si l'on avait ouvert l'hémisphère suivant ce quart de circonférence; mais l'inconvénient occasionné par la séparation ainsi produite se trouvera bien amoindri si elle se trouve effectuée suivant un quadrant ne rencontrant aucune terre, ou du moins ne rencontrant que celles des zones glaciales. Cette condition est remplie par les deux quarts de méridien qui aboutissent au pôle antarctique en partant des deux points diamétralement opposés de l'équateur dont les longitudes comptées à partir du méridien de Paris, l'une à l'est, l'autre à l'ouest, sont respectivement de 70 et de 110 degrés; ces points sont d'ailleurs ceux que l'on place au centre sur les mappemondes ordinaires. L'un des deux quarts de méridien dont nous venons de parler se dirige dans l'océan Indien, et l'autre dans l'océan Pacifique; on effectuera la séparation suivant le premier pour l'hémisphère qui renferme l'ancien continent, l'Australie et les îles de la Sonde; on la fera suivant le second pour l'hémisphère occupé par le reste de l'Océanie et les deux Amériques. On pourra alors adopter un mode de pro-

jection beaucoup plus avantageux que les précédents, savoir la projection conique authalique répondant à $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Tableau XII), laquelle est périgonale, et par conséquent périmécoïque, pour un hémisphère. La plus grande valeur de $a$ ne sera plus que $\sqrt[4]{2}$ ou $1,189$; la plus petite valeur de $b$ deviendra $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ou $0,841$; le rapport de la longueur la plus amplifiée à la longueur la plus réduite sera donc $\sqrt{2}$ ou $1,414$; enfin la plus grande valeur de $\sin\omega$ se réduira à $\tang^2 \frac{\pi}{8}$, ce qui correspond à $\omega = 9^\circ 53'$, $2\omega = 19^\circ 45'$.

Dans ce mode de projection, la carte de chaque hémisphère n'occupe plus un cercle entier, mais seulement un secteur de 255 degrés environ; les deux quarts d'équateur n'y sont pas dans le prolongement l'un de l'autre et font entre eux un angle d'un peu plus de 127 degrés; mais à cela il y a peu d'inconvénient, puisque le centre de la carte, où s'effectue la brisure, et pour lequel la loi de la déformation est ici en défaut, correspond à un point assez éloigné des continents.

Pour étudier la disposition mutuelle des quelques petites îles qui ont été disjointes, il suffirait de faire tourner, autour du centre, une portion de la carte, sans modifier en rien sa forme, jusqu'à ce que la réunion se trouve effectuée. Afin que l'on n'ait pas à faire cette rotation, le constructeur de la carte pourra utiliser le secteur de 105 degrés qui est resté vide en y représentant de nouveau, mais cette fois réunies, les parties qui ont été séparées, ou bien encore en prolongeant, de chaque côté, la carte déjà construite pour y ajouter celle d'un demi-fuseau de 60 à 70 degrés, lequel figurerait ainsi deux fois sur la carte totale.

La projection dont nous nous occupons ne produit aucune déformation à $65^\circ,5$ de distance du point central; de sorte qu'il y a, dans l'hémisphère oriental, un cercle traversant l'Afrique, l'Europe, l'Asie et l'Australie, tout le long duquel les altérations sont nulles; le cercle de l'hémisphère occidental, qui possède la même propriété, traverse les deux Amériques. Ainsi, non-seulement les altérations ne sont jamais considérables, mais le nombre des points importants où elles atteignent leurs plus grandes valeurs est très-restreint. On peut d'ailleurs les déterminer, comme dans les projections centrales, à l'aide de constructions géométriques et en corriger les angles ainsi que les longueurs. Elles sont les mêmes à des distances égales du centre. En joignant au centre un point quelconque de la carte, par une ligne droite, on obtient l'une des deux directions qui, partant de ce point, se coupent à angle droit sur la carte comme sur le globe; les déviations comptées à partir de l'une ou l'autre n'atteignent jamais 10 degrés. C'est aussi sur ces deux directions que se mesurent la longueur la plus amplifiée et la longueur la plus réduite, lesquelles, dans les cas les plus défavorables, ne diffèrent de la longueur vraie que de sa cinquième partie, ainsi que cela résulte des nombres que nous avons donnés tout à l'heure.

Au lieu d'adopter, pour $n$, la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $0,707$, on peut prendre, en nombre rond, $n = 0,75 = \frac{3}{4}$, ce qui rend la construction plus commode. On augmentera ainsi un peu les altérations sur les bords de la carte, mais on les diminuera vers le centre, c'est-à-dire dans la région où, d'après le Tableau XII, elles varient le plus lentement. Le petit cercle lieu des points d'altérations nulles n'aura plus que 60 degrés de rayon sphérique et divisera les continents en parties plus égales. L'angle du secteur resté vide sera réduit à 90 degrés, et les deux moitiés de l'équateur de la carte feront entre elles un angle un peu plus obtus. On aura d'ailleurs, pour les plus grandes valeurs de $a$, $(a)$ et $\omega$ : au centre de la carte,

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155, \quad (a) = \frac{4}{3} = 1,333,$$

$$\sin\omega = \frac{1}{7}, \quad \omega = 8^\circ 13', \quad 2\omega = 16^\circ 26';$$

sur les bords,

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225, \quad (a) = \frac{3}{2} = 1,500,$$

$$\sin\omega = \frac{1}{5}, \quad \omega = 11^\circ 32', \quad 2\omega = 23^\circ 4'.$$

**143.** La projection conique autogonale qui correspond à $n = \frac{2}{3}$ et la projection tronconique authalique qui correspond à $n = 0,609$, $\rho = 0,3404$ seraient celles qu'il conviendrait d'adopter si l'on voulait représenter un hémisphère limité par l'équateur, en ne tenant pas compte des déformations produites au delà du parallèle de 75 degrés de latitude. La première donnerait 1,275 pour le plus grand rapport de longueurs, et 1,624 pour le plus grand rapport de surfaces; la seconde donnerait $13^\circ 14'$ pour la plus grande altération d'angle et 1,123 pour le maximum de $(a)$. Les limites des altérations se trouveraient ainsi moindres que dans la représentation d'un hémisphère sur un méridien. Mais cette combinaison présenterait le grave inconvénient de séparer sur les mappemondes les deux parties de l'Afrique, ainsi que les deux parties de l'Amérique, situées au nord et au sud de l'équateur.

144. Au lieu d'un hémisphère entier, considérons maintenant une zone à une base limitée par un petit cercle. Il est clair que les projections les plus avantageuses se trouveront parmi les projections centrales. La projection stéréographique sera encore celle des projections autogonales qui réduira le plus possible les plus grandes altérations de longueur et de surface; la projection centrale de Lambert sera celle des projections authaliques qui réduira le plus possible les plus grandes altérations d'angle et de longueur, à moins que l'on ne se *décide à ouvrir* la *zone et* à la *représenter* par la projection conique authalique qui est périgonale pour cette zone; enfin la projection de Guillaume Postel réduira à son minimum la plus grande altération de longueur. A ces projections on pourra joindre celle de M. Airy ainsi que des perspectives, qui ne seront pas les mêmes que celles auxquelles nous avons été conduits lorsqu'il s'agissait d'un hémisphère entier, mais pour lesquelles les limites des distances du point de vue au centre de la sphère se détermineront d'une manière analogue. Nous avons pris comme exemples les trois zones à une base dont les rayons sphériques sont de 25, 40 et 50 degrés; on verra tout à l'heure pourquoi ce sont celles-là que nous avons choisies. Dans le tableau qui leur est relatif, figurent les projections qui viennent d'être citées, sauf celle de M. Airy et les perspectives; nous y avons fait aussi entrer les perspectives qui sont périmécoïques et celles qui sont périhaliques pour les trois zones; on remarquera que, dans les premières, les altérations *maxima* diffèrent à peine de celles de la projection de Guillaume Postel, et, dans les trois autres, de celles de la projection centrale de Lambert.

| NOMS DES PROJECTIONS. | PREMIÈRE ZONE. Rayon de 25 degrés. | | | DEUXIÈME ZONE. Rayon de 40 degrés. | | | TROISIÈME ZONE. Rayon de 50 degrés. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | MAXIMA DE | | | | | | | | |
| | $2\omega$ | $(a)$ | S | $2\omega$ | $(a)$ | S | $2\omega$ | $(a)$ | S |
| Projection stéréographique..... | 0° 0' | 1,049 | 1,101 | 0° 0' | 1,132 | 1,282 | 0° 0' | 1,217 | 1,482 |
| Projections coniques authaliques périgonales................ | 1.22 | 1,024 | 1,000 | 3.34 | 1,064 | 1,000 | 5.38 | 1,103 | 1,000 |
| Projection de Guillaume Postel. | 1.50 | 1,032 | 1,032 | 4.44 | 1,086 | 1,086 | 7.27 | 1,139 | 1,139 |
| Perspectives périmécoïques..... | 1.50 | 1,033 | 1,033 | 4.47 | 1,087 | 1,087 | 7.36 | 1,142 | 1,142 |
| Projection centrale de Lambert.. | 2.45 | 1,049 | 1,000 | 7. 7 | 1,132 | 1,000 | 11.15 | 1,217 | 1,000 |
| Perspectives périhaliques ...... | 2.46 | 1,050 | 1,001 | 7.14 | 1,135 | 1,003 | 11.33 | 1,224 | 1,008 |

L'Europe, moins une partie du Spitzberg et de la Nouvelle-Zemble, est comprise à l'intérieur d'une calotte sphérique ayant son pôle aux environs de Plock en Pologne, et dont le rayon est de 25 degrés; les nombres des trois premières colonnes lui sont donc applicables. La même partie du monde est aussi comprise dans la zone limitée par les parallèles de 35 degrés et de 75 degrés de latitude, ce qui permet d'en construire la carte à l'aide de la projection conique autogonale qui est périhalique pour cette zone, ou encore à l'aide de la projection tronconique authalique qui est périgonale pour ladite zone; mais ces deux projections conduisent à des altérations *maxima* respectivement plus fortes que celles de la projection stéréographique et que celles de la projection conique authalique qui figure dans le Tableau.

Le rayon sphérique de la calotte la moins étendue qui contienne l'Asie est de 50 degrés; les nombres des trois dernières colonnes font donc connaître les plus grandes altérations produites sur la carte de cette partie du monde par les six projections.

Pour l'Afrique et pour l'Amérique septentrionale, c'est aux quatrième, cinquième et sixième colonnes qu'il faut se reporter, car les deux calottes sphériques correspondantes ont l'une et l'autre 40 degrés de rayon.

Pour l'Amérique du Sud, le rayon de la calotte est de 33 degrés, ce qui conduit à des altérations intermédiaires entre celles des trois premières colonnes et celles des trois suivantes; avec la projection stéréographique, par exemple, le plus grand rapport de longueurs est 1,088, et le plus grand rapport de surfaces 1,183.

Appliquées à la carte d'Afrique et à celle de l'Amérique du Sud, les projections coniques authaliques périgonales ne présenteraient pas, comme sur celles d'Europe et d'Asie, l'inconvénient de disjoindre des points qui se touchent sur la surface terrestre, et produiraient des altérations moindres que celles de la projection centrale de Lambert. Pour l'Afrique, on placerait près de la côte du Gabon le pôle de la calotte sphérique, dont on porterait le rayon à 42 ou 43 degrés, et l'on effectuerait la séparation suivant l'arc d'équateur qui se dirige dans l'océan Atlantique. Pour l'Amérique méridionale, on donnerait 37 degrés de rayon à la calotte sphérique, et l'on séparerait suivant un arc de grand cercle dirigé dans l'océan Pacifique. On pourrait même diminuer encore les altérations, mais cette fois de quantités assez faibles, en substituant les projections tronconiques aux projections coniques.

La projection de Bonne serait beaucoup moins avantageuse que celles du Tableau précédent pour les cartes des mêmes régions. On peut s'en convaincre par un coup d'œil jeté sur les nombres ci-dessous, que nous avons cependant déterminés en adoptant les méridiens et les parallèles moyens les plus favorables.

*Projection de Bonne.*

| RÉGIONS. | MAXIMA DE | | |
|---|---|---|---|
| | $2\omega$. | $(a)$. | S. |
| Europe | 6°,23' | 1,118 | 1,000 |
| Asie | 26,10 | 1,585 | 1,000 |
| Afrique | 12,28 | 1,244 | 1,000 |
| Amérique du Nord | 22,34 | 1,487 | 1,000 |
| Amérique du Sud | 8,16 | 1,155 | 1,000 |

**145.** Les projections que nous avons considérées dans le numéro précédent ne sont pas celles qui abaissent le plus possible les limites des altérations sur les cartes d'Europe, d'Asie, d'Afrique, etc., parce que ces régions sont loin d'occuper entièrement les plus petites zones à une base qui les contiennent. Si l'on veut trouver, pour chacune de ces cartes ou pour celle d'un pays quelconque, les systèmes qui remplissent les conditions énoncées, il faudra avoir recours au procédé que nous allons expliquer maintenant.

Il n'est pas de mode de projection pour lequel on ne puisse dessiner sur le globe le contour d'une région à la représentation de laquelle il s'adapterait mieux que tous les autres; aucun de ceux qui ont été proposés jusqu'à présent ne doit donc être exclu *a priori;* seulement beaucoup pourront l'être à la suite d'un examen rapide dans lequel on aura eu égard, en consultant nos Tableaux, à la forme et à l'étendue de la contrée dont il s'agit de construire la carte. Dans cet examen préalable et dans la comparaison que l'on devra effectuer ensuite entre les systèmes non rejetés, on ne devra pas perdre de vue la remarque suivante.

Chaque système de projection est susceptible d'en engendrer une infinité d'autres, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte par un exemple. Considérons la projection de Lagrange, qui conserve les angles, et qui jouit de la propriété qu'à partir d'un certain point de l'équateur les altérations y varient moins rapidement, sur cette ligne et sur le méridien, que dans les autres projections autogonales à méridiens circulaires. Il est facile d'imaginer un autre système remplissant des conditions analogues et possédant la même propriété par rapport à un autre point de la sphère et à deux grands cercles quelconques se coupant à angle droit; le pôle de l'un de ces deux grands cercles remplacera ici le pôle géographique, et les formules qui donnaient, dans le premier cas, les coordonnées des divers points de la carte s'appliqueront aussi au second, pourvu qu'on y remplace la longitude et la latitude par deux nouvelles variables qui en seront des fonctions connues. En déplaçant les deux grands cercles, on obtiendra une infinité de modes de projection fournissant des valeurs différentes, pour les limites des altérations, dans la représentation d'une seule et même contrée. Comme autre exemple, on peut citer la projection stéréographique, qui, suivant qu'on l'effectue sur l'horizon d'un lieu ou sur celui d'un autre lieu, donne à la carte d'un même pays des aspects différents.

Nous avons déjà parlé de cartes sur lesquelles seraient tracées, pour les divers systèmes de projection, des courbes suffisamment rapprochées d'égales altérations ou de *maxima* égaux d'altérations. Pour les projections autogonales, chaque courbe serait le lieu des points où le rapport de surfaces prend une valeur donnée; pour les projections authaliques, ce serait le lieu des points où la plus grande altération d'angle atteint une limite donnée; pour chaque projection aphylactique, il serait utile qu'il y eût quatre séries de courbes, dont deux se rapporteraient aux éléments qui viennent d'être mentionnés, et les deux autres aux axes de l'ellipse indicatrice. Les cartes pourraient être construites d'après la projection centrale de Lambert; quant aux courbes, on les tracerait, en partant de leurs équations, qu'il est facile de former, ou mieux en renversant la question et calculant, pour beaucoup plus de points que nous n'avons pu le faire, les éléments de la déformation.

L'emploi de ces cartes conduirait, dans chaque cas particulier, à la solution du problème qui nous occupe, et l'on comprend qu'il suffit d'en avoir une seule pour tous les systèmes de projection qui se déduisent les uns des autres par le mode de génération qui a été expliqué tout à l'heure. Imaginons en effet une carte auxiliaire de la contrée tracée aussi d'après la projection centrale de Lambert, et plaçons-la, par exemple, sur la feuille où sont dessinées les courbes d'égales altérations de la projection de Lagrange; en la faisant glisser et tourner sur cette feuille, on arrivera à lui donner une position dans laquelle le *maximum* d'altération indiqué sera moindre que dans toute autre. On relèvera alors, sur la carte mobile, la longitude et la latitude du point d'intersection des deux droites de la carte fixe qui représentent l'équateur et le méridien moyen de cette dernière ; on mesurera aussi l'azimut de l'une de ces droites par rapport au méridien de la carte mobile, et on le corrigera de la déviation occasionnée par la projection de Lambert. On obtiendra ainsi les éléments propres à caractériser celui des systèmes dérivés de la projection de Lagrange qui atténue le plus le *maximum* d'altération dans la représentation de la contrée donnée. On opérera de même pour les autres projections autogonales, et l'on arrivera ainsi à connaître celle qui correspond à la plus petite valeur du *maximum* de l'altération de surface, et par conséquent aussi du *maximum* de l'altération de longueur.

Un procédé analogue appliqué aux projections authaliques donnera celle qui correspond aux plus petites valeurs des *maxima* des altérations d'angles et de longueurs. On l'appliquera aussi aux projections aphylactiques, afin de reconnaître celles qui produisent en même temps un *maximum* d'altération d'angle et un *maximum* d'altération de surface respectivement moindre que les plus faibles qui aient été obtenus par les projections authaliques et par les projections autogonales. On déterminera en particulier la projection aphylactique qui réduit le plus possible la plus grande altération de longueur;

ici, les recherches s'effectueront à l'aide des courbes relatives aux axes des ellipses indicatrices, et il pourra y avoir quelque tâtonnement provenant de ce que l'élément à considérer est le rapport de la plus forte valeur du grand axe, pour toute l'étendue de la carte, à la plus faible valeur du petit axe, lorsque la moitié de cette dernière est différente de l'unité.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55