Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation et sur la séparation des racines

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 97-105

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__97_0>

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES D'UNE ÉQUATION ET SUR LA SÉPARATION DES RACINES;

PAR M. LAGUERRE.

[SUITE (1).]

8. J'ajouterai encore, pour éclaircir ce qui précède, une seconde application.

Soit l'équation

$$f(x) = x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0,$$

qui a été considérée par M. J. Petersen dans sa *Théorie des équations algébriques* (2).

En substituant successivement 0 et $+1$ dans le polynôme $f(x)$ et dans ses dérivées, on déduit du théorème de Budan que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre les limites considérées ou qu'elle en a deux, et l'on peut trancher la difficulté en substituant, comme le fait M. Petersen, un nombre intermédiaire et en mettant en usage une règle due à Fourier.

Appliquons la méthode exposée ci-dessus et effectuons la division du polynôme

$$x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5$$

par $x^2 - x$; on trouve aisément

$$\begin{aligned} &x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 \\ &\quad = (x^3 - 4x^2 - 20x - 8)(x^2 - x) - 17x - 5, \end{aligned}$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 49.

(2) *Theorie der algebraischen Gleichungen*, p. 202.

d'où

$$\frac{x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5}{x^2 - x}$$

$$= x^3 - 4x^2 - 20x - 8 - \frac{17x + 5}{x^2 - x}$$

$$= x^3 - 4x^2 - 20x - 8 - \frac{22}{x - 1} + \frac{5}{x};$$

ce qui donne, en développant $\frac{22}{x-1}$ suivant les puissances croissantes de x et en ne retenant du développement que les termes d'un degré inférieur à celui de x^4,

$$x^3 - 4x^2 - 20x - 8 + 22 + 22x + 22x^2 + 22x^3 + \frac{5}{x},$$

ou, en ordonnant,

$$23x^3 + 18x^2 + 2x + 14 + \frac{5}{x}.$$

Cette suite ne présentant aucune variation, nous en conclurons que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre o et $+1$; c'est le résultat auquel conduit l'application de la règle de Fourier.

IV.

9. Il y aura souvent lieu de faire simultanément usage du théorème de Budan et du procédé de la division. Il est facile du reste d'imaginer des cas très étendus où ce procédé est plus avantageux que l'emploi du théorème de Budan.

Pour en donner un exemple, j'énoncerai d'abord, sous la forme suivante, la proposition que j'ai démontrée plus haut :

En désignant par a et b deux nombres positifs, soit

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient du polynôme $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, et considérons la suite

$$(5)\quad \begin{cases} f(a),\ f(b)-b(b-a)C_0, \\ f(b)-b^2(b-a)C_1,\ \ldots, \\ f(b)-b^{m-1}(b-a)C_{m-2},\ f(b); \end{cases}$$

le nombre des racines de l'équation

$$f(x)=0$$

qui sont comprises entre a et b est au plus égal au nombre des variations des termes de cette suite, et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

10. Cela posé, proposons-nous le problème suivant :

Étant donné un polynôme entier $f(x)$, déterminer deux limites, entre lesquelles demeure comprise la valeur de ce polynôme, lorsque x prend toutes les valeurs comprises entre les deux nombres positifs a et b.

Il est clair que ce problème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Trouver deux nombres α et β tels que, pour toutes les valeurs de λ inférieures à α et pour toutes les valeurs de cette variable supérieures à β, l'équation

$$f(x)-\lambda=0$$

n'ait pas de racine réelle comprise entre a et b.

L'emploi du théorème de Budan ne peut, en général, être d'aucun secours pour la détermination de ces nombres, car, si l'on considère les deux suites

$$f(a)-\lambda,\quad f'(a),\quad f''(a),\quad \ldots$$

et

$$f(b)-\lambda,\quad f'(b),\quad f''(b),\quad \ldots,$$

on voit que, quand l'ensemble des termes $f'(a), f''(a), \ldots$ et l'ensemble des termes $f'(b)$, $f''(b)$, ... ne présentent pas le même nombre de variations, il est impossible de déterminer λ de telle sorte que les deux suites précédentes offrent le même nombre de variations : ce qui serait nécessaire pour pouvoir conclure du théorème de Budan que l'équation $f(x) - \lambda = 0$ n'a aucune racine réelle comprise dans l'intervalle considéré.

J'emploierai ici la méthode de la division, et, en désignant comme ci-dessus par

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-2} x^{m-2}$$

la partie entière du quotient de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, je remarque d'abord que ce polynôme est aussi la partie entière du quotient de $f(x) - \lambda$ par $(x-a)(x-b)$.

La suite que nous avons à considérer devient ainsi

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(a) - \lambda, \; f(b) - \lambda - b(b-a)C_0, \\ f(b) - \lambda - b^2(b-a)C_1, \; \ldots, \\ f(b) - \lambda - b^{m-1}(b-a)C_{m-2}, \; f(b) - \lambda. \end{array} \right.$$

Désignons respectivement par α et par β le plus petit et le plus grand des termes de la suite (5) ; si l'on donne à λ une valeur quelconque inférieure à α, tous les termes de la suite (6) sont négatifs, d'où il résulte que l'équation $f(x) - \lambda = 0$ n'a aucune racine réelle comprise entre a et b lorsque λ est plus petit que α. On prouverait de même que cette équation n'a aucune racine réelle comprise entre ces limites lorsque λ est plus grand que β.

D'où la proposition suivante :

La valeur que prend le polynôme $f(x)$, quand x varie depuis a jusqu'à b, demeure toujours comprise entre les nombres α et β.

V.

11. J'ai démontré précédemment qu'étant donnée une équation

$$f(x) = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots = 0,$$

où les termes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, si l'on forme les polynômes

$$\Phi_0(x) = A_0 x^m,$$
$$\Phi_1(x) = A_0 x^m + Bx^n,$$
$$\Phi_2(x) = A_0 x^m + Bx^n + Cx^p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont supérieures au nombre positif a est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\Phi_0(a),\ \Phi_1(a),\ \Phi_2(a),\ \ldots.$$

La démonstration supposait évidemment que les exposants m, n, p, ... étaient des nombres entiers et positifs; mais il est facile de voir que cette restriction est inutile.

En premier lieu, si quelques-uns étaient négatifs, en multipliant $f(x)$ par une puissance de x convenablement choisie (ce qui n'altérerait pas le nombre des racines positives de l'équation), on pourrait rendre tous ces exposants positifs.

En second lieu, si quelques-uns des nombres m, n, p, ... étaient fractionnaires, on arriverait au même résultat en changeant x en x^ω, ω étant le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres m, n, p, ... Par un raisonnement connu, on en déduit que la proposition subsiste encore lorsque les exposants sont incommensurables.

Rien n'empêche même de supposer que le nombre des termes de la fonction $f(x)$ soit illimité, pourvu que la série composée de ces termes soit convergente pour $x = a$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots,$$

où le second membre est une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et convergente pour $x = a$, le nombre des racines positives de l'équation

$$f(x) = 0,$$

qui sont supérieures au nombre positif a, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\Phi_0(a),\ \Phi_1(a),\ \Phi_2(a),\ \ldots,$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

Le nombre de ces variations sera du reste évidemment fini, si la série tend, pour $x = a$, vers une limite différente de zéro, puisque pour une valeur suffisamment grande de n les termes

$$\Phi_n(a),\ \Phi_{n+1}(a),\ \Phi_{n+2}(a),\ \ldots$$

doivent avoir le même signe que $f(a)$.

12. Semblablement, étant donnée une équation

$$f(x) = A + Bx^m + Cx^n + Dx^p + \ldots,$$

où le second membre est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x (les exposants m, n, p, ... pouvant être d'ailleurs entiers, fractionnaires ou irrationnels) et convergente pour une valeur positive de x

égal à a; formons la suite des polynômes

$$\Phi_0(x) = A, \quad \Phi_1(x) = A + Bx^m, \quad \Phi_2(x) = A + Bx^m + Cx^n, \ldots.$$

Cela posé, *le nombre des racines positives de l'équation* $f(x) = 0$ *qui sont inférieures à* a *est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite*

$$\Phi_0(a), \ \Phi_1(a), \ \Phi_2(a), \ \ldots,$$

et, si ces deux nombres sont différents, leur différence est un nombre pair.

VI.

13. Je donnerai encore, en terminant, une application de la règle des signes de Descartes aux équations que l'on obtient en égalant à zéro les dénominateurs des réduites de la fonction e^x.

On appelle, comme on le sait, réduite de rang n de la fonction e^x une fraction

$$\frac{\Phi(x)}{F(x)}$$

dont les deux termes sont des polynômes de degré n tels que le développement de cette fraction suivant les puissances croissantes de x coïncide, jusqu'au terme du degré $2n$ inclusivement, avec le développement de e^x (¹); on peut poser, par conséquent,

$$F(x)e^x = \Phi(x) + R,$$

R désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de x^{2n+1}.

(¹) Sur ces réduites, *voir* notamment le Mémoire de M. Hermite. *Sur la fonction exponentielle*, p. 4.

On a d'ailleurs

$$F(x) = x^n - n(n+1)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)x^{n-2} - \ldots,$$

en sorte que le polynôme $F(x)$ ne présente que des variations; par suite, l'équation

$$F(x) = 0$$

ne peut avoir que des racines positives.

Le polynôme $\Phi(x)$, étant égal à $F(-x)$, ne présente que des permanences. J'observe maintenant que la série R satisfait à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x+2n)\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

Cette série est de la forme

$$\Sigma A_m x^m,$$

où m doit prendre toutes les valeurs entières depuis $2n+1$ jusqu'à l'infini. En substituant cette expression dans l'équation différentielle, on voit aisément que l'on a identiquement

$$\Sigma m(m-1)A_m x^{m-1} - \Sigma m A_m (x^m + 2nx^{m-1}) + n\Sigma A_m x^m = 0,$$

d'où la relation suivante :

$$A_{m+1} = \frac{m-n}{(m-2n)(m+1)} A_m.$$

La fraction

$$\frac{m-n}{(m-2n)(m+1)}$$

étant positive pour toutes les valeurs de m supérieures à $2n$, on en conclut que tous les termes de la série R ont le même signe.

Par suite, le polynôme $\Phi(x)$ et la série R n'ayant que des permanences, on voit que le développement de $e^x F(x)$ présente au plus une seule variation; l'équation

$$e^x F(x) = 0,$$

qui a les mêmes racines que l'équation $F(x) = 0$ et dont le développement est d'ailleurs convergent pour toutes les valeurs de la variable, a donc, en vertu de la règle des signes de Descartes, une racine positive au plus; l'équation $F(x) = 0$ ne peut avoir du reste que des racines positives.

D'où la conclusion suivante :

Si le nombre n est pair, l'équation $F(x) = 0$ *a toutes ses racines imaginaires.*

Si ce nombre est impair, elle a une seule racine réelle.