GAMBEY

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1878

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 82-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__82_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1878;

PAR M. GAMBEY.

On donne une sphère S, *un plan* P *et un point* A; *par le point* A *on mène une droite qui rencontre le plan* P *en un point* B, *puis sur* AB *comme diamètre on décrit une sphère* S'; *le plan radical des sphères* S *et* S' *rencontre la droite* AB *en un point* M:

1° *Trouver le lieu décrit par le point* M *quand la droite* AB *tourne autour du point* A;

2° *Discuter le lieu du point* M *en supposant que le point* A *se déplace dans l'espace, le point* P *et la sphère* S *restant fixes.*

Je prends le plan P pour plan des xy et je fais passer l'axe des z par le centre de la sphère S.

Soient:

α, β, γ les coordonnées du point A;
h le z du centre de S;
r son rayon.

Les équations d'une droite quelconque AB passant en A étant prises sous la forme

$$x-\alpha=m(z-\gamma),$$
$$y-\beta=n(z-\gamma),$$

on en déduit, pour les coordonnées du point milieu du segment AB,

$$\alpha-\frac{m\gamma}{2},\quad \beta-\frac{n\gamma}{2},\quad \frac{\gamma}{2},$$

et, pour l'équation de la sphère S',

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2+m\gamma(x-\alpha)+n\gamma(y-\beta)-\gamma z=0.$$

D'ailleurs, l'équation de S est

$$x^2 + y^2 + (z - h)^2 - r^2 = 0.$$

Retranchant ces équations membre à membre, il vient, pour l'équation du plan radical des sphères S et S',

$$\begin{aligned} m\gamma(x-\alpha) + n\gamma(y-\beta) - 2\alpha x - 2\beta y \\ + (2h-\gamma)z + \alpha^2 + \beta^2 + r^2 - h^2 = 0. \end{aligned}$$

En éliminant *m* et *n* entre cette équation et celles de la droite AB, on obtiendra l'équation du lieu cherché. Cette élimination est immédiate, et l'on obtient, après quelques calculs et réductions,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma(x^2+y^2) + (2h-\gamma)z^2 - 2\beta yz - 2\alpha xz \\ + (S + 2K^2)z - K^2\gamma = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2h\gamma + h^2 - r^2 = S \quad \text{et} \quad r^2 - h^2 = K^2,$$

avec l'hypothèse $r > h$.

Propriétés générales du lieu. — L'équation (1) représente une surface du second ordre qui passe au point A. Cette surface admet comme plans cycliques les plans parallèles au plan P, et le point A est un de ses ombilics, car, pour $z = \gamma$, on obtient le cercle-point

$$z = \gamma, \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0.$$

L'équation (1) pouvant encore s'écrire des deux manières suivantes,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma(x^2+y^2-K^2) \\ - z[2\alpha x + 2\beta y + (\gamma - 2h)z - S - 2K^2] = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma[x^2+y^2+(z-h)^2 - r^2] \\ - z[2\alpha x + 2\beta y + 2(\gamma - h)z - 2h\gamma - S - 2K^2] = 0, \end{aligned} \right.$$

on en conclut que la surface qu'elle représente contient les courbes planes intersections du cylindre

$$x^2+y^2-K^2=0$$

avec les deux plans

$$z=0, \quad 2\alpha x+2\beta y+(\gamma-2h)z-S-2K^2=0,$$

ainsi que celles qui résultent de l'intersection de la sphère S et des plans

$$z=0, \quad 2\alpha x+2\beta y+2(\gamma-h)z-2h\gamma-S-2K^2=0.$$

La surface (3) et la sphère S sont donc doublement tangentes. On voit en outre que le plan

$$2\alpha x+2\beta y+2(\gamma-h)z-2h\gamma-S-2K^2=0$$

est parallèle au plan polaire du point A par rapport à la sphère S.

Discussion. — J'emploie la transformation en carrés. Mettant tout de suite de côté le cas où le point A est dans le plan P, cas auquel l'équation (1) se décompose en deux facteurs linéaires dont l'un désigne le plan P, je suppose γ différent de zéro.

Je multiplie par γ, ce qui permet de former immédiatement deux carrés. L'équation (1) peut alors s'écrire

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\gamma x-\alpha z)^2+(\gamma y-\beta z)^2 \\ \quad -(S+K^2)z+\gamma(S+2K^2)z-K^2\gamma=0. \end{array} \right.$$

Si l'on a $S+K^2=0$, c'est-à-dire si le point A est sur la sphère concentrique à la sphère S et tangente au plan P, l'équation du lieu est ramenée au type

$$M^2+N^2+P=0;$$

elle représente alors un *paraboloïde elliptique*.

Si l'on a en outre $S=0$, ce qui suppose $r=h$, le lieu se compose de la droite réelle intersection des deux plans imaginaires

$$(\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2 = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait $S + K^2$ différent de zéro. On peut alors multiplier (4) par $S + K^2$ et l'écrire ainsi :

$$(5)\quad \begin{cases} (S + K^2)[(\gamma x - \alpha z)^2 + (\gamma y - \beta z)^2] \\ \qquad - [(S + K^2) z + \frac{\gamma}{2}(S + 2K^2)]^2 = -\gamma^2 S^2. \end{cases}$$

Elle rentre alors dans le type des surfaces à centre unique.

Distinguons deux cas, et, pour abréger, posons $S + K^2 = S_1$.

1° $S \gtrless 0$. — Si l'on a $S_1 > 0$, c'est-à-dire si le point A est extérieur à la sphère concentrique à la sphère S et tangente au plan P, la surface est un *hyperboloïde à une nappe*.

Si au contraire on a $S_1 < 0$, c'est-à-dire si le point A est intérieur à la même sphère, la surface est un *ellipsoïde réel*.

Le cas de $S_1 = 0$ a déjà été examiné.

2° $S = 0$. — Pour $S_1 > 0$, on a un *cône réel*. Cela suppose $r > h$, ce qui est justement notre hypothèse.

Si l'on supposait $r < h$, le cône deviendrait imaginaire.

Ainsi, lorsque le point A est dans la région de l'espace extérieure à la sphère concentrique à S et tangente à P, le lieu est un hyperboloïde à une nappe.

Si ce point est dans la région intérieure à la même sphère, le lieu est un ellipsoïde.

Enfin, si le point A est sur la surface séparative, le lieu est un paraboloïde elliptique.

Dans le cas où le point A est situé sur la sphère donnée, l'hyperboloïde se confond avec son cône asymptote.

Note. — La même question a ete resolue par MM. Duranton, professeur au lycee du Puy; A. Leinekugel.