NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur une application de la méthode de Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 76-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__76_1>

SUR UNE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE STURM;

PAR M. CH. BIEHLER,
Directeur des études à l'École préparatoire du collège Stanislas.

L'application de la méthode de Sturm à l'équation de degré m qui fournit les m valeurs de tang $\frac{\alpha}{m}$, quand on connaît tang α, donne lieu à une remarque qui offre quelque intérêt.

Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\alpha = a, \quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{m} = x,$$

l'équation dont il s'agit est

$$a = \frac{(1+ix)^m - (1-ix)^m}{i[(1+ix)^m + (1-ix)^m]},$$

et, mise sous forme entière, elle devient

$$(1+ix)^m(1-ia) - (1-ix)^m(1+ia) = 0.$$

Le premier membre de cette équation renferme i en facteur. Soit

$$(1) \qquad iU_m = (1+ix)^m(1-ia) - (1-ix)^m(1+ia),$$

et désignons généralement par iU_μ le polynôme

$$iU_\mu = (1+ix)^\mu(1-ia) - (1-ix)^\mu(1+ia);$$

on a entre U_m, U_{m-1}, U_{m-2} la relation

$$(2) \qquad U_m - 2U_{m-1} + (1+x^2)U_{m-2} = 0.$$

On obtient cette relation en multipliant membre à membre l'équation (1) et la suivante

$$(3) \qquad 2 = (1+ix) + (1-ix),$$

et en changeant dans le résultat obtenu m en $m-1$.

C'est l'équation (2) qui va nous permettre d'établir, par la méthode de Sturm, la réalité de toutes les racines de l'équation

$$U_m = 0.$$

De l'équation (2) on tire en effet, par le changement de m en $m-1$, $m-2$, ..., 3, 2, les suivantes :

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} U_m \;\;\; = 2U_{m-1} - (1+x^2)U_{m-2}, \\ U_{m-1} = 2U_{m-2} - (1+x^2)U_{m-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_2 \;\;\; = 2U_1 \;\;\; - (1+x^2)U_0. \end{array}\right.$$

Ces fonctions U jouissent des propriétés suivantes :

1° U_0 est une constante, $U_0 = -2a$;

2° Deux fonctions consécutives U_μ, $U_{\mu-1}$ ne peuvent s'annuler pour une même valeur de x, car U_0 devrait s'annuler, ce qui est impossible d'après ce qui précède;

3° Si une fonction U_μ s'annule pour une certaine valeur de x, les deux fonctions $U_{\mu-1}$, $U_{\mu+1}$ sont de signes contraires.

On en conclut que, si la suite des fonctions

$$U_m,\quad U_{m-},\quad \ldots,\quad U_1,\quad U_0$$

présente k variations pour $x = \alpha$ et k' variations pour $x = \alpha'$, il y a au moins $k - k'$ racines réelles de l'équation $U_m = 0$ entre α et α' si k est supérieur à k', et $k' - k$ racines réelles si k est inférieur à k'.

Pour les formes $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ du nombre entier μ, les coefficients du terme de degré le plus élevé de U_μ sont respectivement

$$-2a,\quad +2,\quad +2a,\quad -2.$$

On voit donc que, si $a > 0$, la suite

$$(5)\qquad U_0,\quad U_1,\quad U_2,\quad \ldots,\quad U_m$$

donne, pour $x = -\infty$, la succession des signes

$$-\quad -\quad +\quad +\quad -\quad -\quad \ldots$$

et, pour $x = +\infty$, la nouvelle succession

$$-\quad +\quad +\quad -\quad -\quad +\quad +\quad \ldots;$$

dans chacune des deux suites les signes n'alternent que de deux en deux, et, si $a < 0$, on a :

pour $x = -\infty$, $+\quad -\quad -\quad +\quad +\quad -\quad -\quad \ldots,$

pour $x = +\infty$, $+\quad +\quad -\quad -\quad +\quad +\quad \ldots.$

Si donc m est pair, le nombre des variations que présente la suite (5) pour $x = -\infty$ est le même que celui qu'elle présente pour $x = +\infty$; dans chaque cas, ce nombre est égal à $\frac{m}{2}$; la quantité $k - k'$ dont il a été question est donc égale à zéro, et la méthode de Sturm semble indiquer que l'équation $U_m = 0$ n'a pas de racines réelles.

Mais, si l'on fait $x = 0$ dans toutes les fonctions de la suite (5), toutes les fonctions de cette suite prennent la même valeur $-2a$; pour $x = -\infty$, la suite (5) présente $\frac{m}{2}$ variations; pour $x = 0$, elle n'offre plus que des permanences : la suite (5) a donc *perdu* $\frac{m}{2}$ variations.

L'équation $U_m = 0$ a donc au moins $\frac{m}{2}$ racines négatives.

Pour $x = +\infty$, la suite (5), présentant $\frac{m}{2}$ variations, en a *gagné* $\frac{m}{2}$ quand x a varié de zéro à $+\infty$.

L'équation $U_m = 0$ a donc au moins $\frac{m}{2}$ racines positives, et, comme elle n'est que de degré m, toutes ces racines sont réelles et il y en a autant de positives que de négatives.

Si m est impair, on voit aisément que, dans le cas de $a > 0$, l'équation $U_m = 0$ a $\frac{m+1}{2}$ racines positives et $\frac{m-1}{2}$ racines négatives; et inversement, si $a < 0$, l'équation $U_m = 0$ a $\frac{m+1}{2}$ racines négatives et $\frac{m-1}{2}$ racines positives.

L'équation $U_m = 0$ a donc, dans tous les cas, toutes ses racines réelles.

Nous avons vu que, si l'on substitue dans la suite (5) successivement $-\infty$ et $+\infty$, le nombre des variations gagnées ou perdues est zéro dans le cas de m pair et 1 dans le cas de m impair.

Cela tient à ce que le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ passe du négatif au positif quand x, en croissant, traverse une racine négative de $U_m = 0$; au contraire, le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ passe du positif au négatif quand x, en croissant, traverse une racine positive de $U_m = 0$. Car la suite (5) perd des variations quand x croît de $-\infty$ à zéro; elle en gagne quand x croît de zéro à $+\infty$.

Il est aisé de démontrer directement que le rapport $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ jouit de cette intéressante propriété.

Si l'on prend les dérivées des deux membres de l'égalité (1), il vient

$$(6)\qquad U'_m = m[(1+ix)^{m-1}(1-ia) + (1-ix)^{m-1}(1+ia)],$$

et, si l'on multiplie (6) par l'identité

$$(7)\qquad 2ix = (1+ix) - (1-ix),$$

membre à membre, il viendra

$$(8)\qquad 2xU'_m = mU_m - m(1+x^2)U_{m-2}.$$

Cette équation, combinée avec l'équation (2), savoir

$$U_m = 2U_{m-1} - (1+x^2)U_{m-2},$$

donne

$$(9)\qquad xU'_m + mU_{m-1} - mU_m = 0,$$

d'où

$$\frac{U_{m-1}}{U_m} = 1 - \frac{x}{m}\frac{U'_m}{U_m}.$$

On sait que, lorsque x, en croissant, traverse une des racines de $U_m = 0$, le rapport $\frac{U'_m}{U_m}$ passe toujours du négatif au positif.

Pour une valeur de x voisine d'une des racines de l'équation $U_m = 0$, le signe de $\frac{U_{m-1}}{U_m}$ est celui de $-x\frac{U'_m}{U_m}$, car cette quantité peut devenir en valeur absolue aussi grande qu'on le veut.

On voit donc que, lorsque x, en croissant, traverse une racine négative de $U_m = 0$, le rapport $-x\frac{U'_m}{U_m}$ passe du négatif au positif comme $\frac{U'_m}{U_m}$; mais, lorsque x traverse en croissant une racine positive de $U_m = 0$, le rapport $-x\frac{U'_m}{U_m}$, et par suite aussi $\frac{U_{m-1}}{U_m}$, passe du positif au négatif.

La méthode de Sturm est donc applicable séparément à chacun des deux intervalles de $-\infty$ à zéro et de zéro à $+\infty$, et elle met ainsi en évidence la réalité de toutes les racines de l'équation $U_m = 0$.

On voit de plus qu'elles sont inégales. En effet, l'équation (9) montre que toute racine multiple de $U_m = 0$ annulerait U_{m-1}, et par suite, d'après (4), elle annulerait $U_{m-2}, U_{m-3}, \ldots, U_0$. Or $U_0 = -2a$; par conséquent, U_0 ne peut s'annuler et l'équation $U_m = 0$ n'a que des racines simples.