NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. KŒNIGS

Propriété des courbes ou des surfaces du second ordre homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 74-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__74_0>

PROPRIÉTÉ DES COURBES OU DES SURFACES DU SECOND ORDRE HOMOFOCALES;

PAR M. G. KOENIGS,
Élève de l'École Normale supérieure.

Trois coniques A, B, C sont liées par la condition que les deux premières soient polaires réciproques par rapport à la troisième; N et Δ désignant un point du plan et sa polaire par rapport à la conique C, on a le théorème suivant :

Les tangentes issues du point N *à la conique* A, *les coniques* B *et* C *marquent sur la droite* Δ *trois couples de points en involution.*

En effet, soient x et y les points doubles de l'involution déterminée sur la droite Δ par les coniques B et C. Ces points étant conjugués par rapport à ces deux coniques, on voit que : 1° leurs polaires par rapport à la conique C sont les droites Ny et Nx; 2° ces droites Nx et Ny sont conjuguées par rapport à la conique A, puisque leurs pôles y et x par rapport à C sont conjugués par rapport à B, et que cette conique B est précisément la polaire réciproque de A par rapport à la conique C. Le faisceau formé par les tangentes issues du point N à la conique A et par les droites Nx, Ny est donc harmonique, ce qui montre que les traces de ces tangentes sur la droite Δ divisent harmoniquement le segment xy, et cela suffit pour démontrer le théorème.

Désignons, suivant l'usage, par $\boxed{\text{AC}}$ le quadrilatère circonscrit commun aux deux coniques A et C.

On voit que Nx et Ny sont les rayons doubles du faisceau involutif de tangentes issues du point N aux coniques inscrites dans le quadrilatère $\boxed{\text{AC}}$.

Du reste, le théorème précédent énonce que, si M et M′ sont les points de rencontre de la conique B avec la droite Δ, NM et NM′ sont deux tangentes issues du point N à une même conique inscrite dans le quadrilatère $\boxed{\text{AC}}$.

Imaginons actuellement que le système des coniques inscrites dans le quadrilatère soit homofocal ; les droites Nx et Ny seront les bissectrices de l'angle formé par un couple quelconque de tangentes issues du point N.

Le théorème ci-dessus prend alors la forme suivante :

Soit un point N *du plan ; sa polaire* Δ *par rapport à une conique* C *donnée coupe cette conique en des points* Q *et* Q′ ; *elle coupe aussi en* M *et* M′ *une conique* B, *polaire réciproque par rapport à* C *d'une conique quelconque homofocale à* C : *les angles* MNQ, M′N′Q′ *sont égaux.*

Ce théorème renferme le suivant, dû à M. Laguerre :

Soit un point N *du plan ; sa polaire* Δ *par rapport à une conique* C *donnée coupe cette conique en des points* Q *et* Q′ ; *elle coupe aussi en* M *et* M′ *le cercle* B, *lieu des points d'où la conique* C *est vue sous un angle droit : les angles* MNQ, M′NQ′ *sont égaux.*

Ce théorème résulte du précédent, car le cercle B est, on le sait, la polaire réciproque par rapport à C d'une conique homofocale.

Mais ce qui paraît plus intéressant, c'est l'extension de ce théorème aux surfaces du second ordre.

Soient A, B, C trois surfaces du second ordre liées par la condition que les deux premières soient polaires réciproques par rapport à la troisième ; désignons par N et Π un point et son plan polaire par rapport à la surface C. On a ce théorème :

Le cône circonscrit à A *et de sommet* N, *les surfaces* B *et* C *tracent sur le plan* Π *trois coniques ayant le même triangle conjugué commun.*

La démonstration est analogue à celle qui a été faite plus haut ; il est donc inutile de la recommencer. Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que, en désignant par x, y, z les sommets de ce triangle, les plans Nzy, Nxz, Nyx sont les plans tangents au point N aux trois surfaces du second ordre qui passent par ce point en étant inscrites dans la développable commune aux deux surfaces A et C. On sait que ces trois plans sont rectangulaires dans le cas où les surfaces A et C sont homofocales. Les droites Nx, Ny, Nz sont alors rectangulaires, et tout cône ayant pour sommet le point N et pour base une conique ayant le triangle xyz comme triangle conjugué admet les trois droites ci-dessus pour axes.

De là ce théorème :

Étant donné un point N, *son plan polaire par rapport à une surface* C *du second ordre coupe suivant une conique* Q *cette surface et suivant une conique* M *la réciproque* B *par rapport à* C *d'une homofocale à* C : *les cônes ayant leur sommet au point* N *et ayant* Q *et* M *pour bases ont les mêmes axes.*