Composition mathématique pour l'admission, en 1879, à l'École polytechnique. Remarques géométriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 5-12

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION, EN 1879, A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. REMARQUES GÉOMÉTRIQUES;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$$

et un point M *sur cette conique. Par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point* M, *on fait passer un cercle. Prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique* (K) *passant par l'origine* O *des axes.*

Occupons-nous d'abord de cette première partie de la question proposée.

Désignons par (M) la conique donnée. Prenons le point M′, symétrique de M par rapport à l'axe des x, et le point M″, symétrique de M par rapport à l'axe des y. La circonférence circonscrite au triangle MM′M″ a pour centre le point O. Ce point appartient alors à la courbe (K).

Le diamètre M′M″ étant le seul qui conduise à ce point du lieu, le point O est un point simple de la courbe (K).

Sur une droite quelconque issue du point O, et en outre de ce point, on a encore un point du lieu : on l'obtient au moyen du diamètre perpendiculaire à cette droite. Une droite issue du point O rencontre donc la courbe (K) en O et en un autre point : donc (K) *est une conique passant par* O.

Au diamètre infiniment voisin de $M'M''$ correspond un point de (K), infiniment voisin de O et situé sur la perpendiculaire élevée en O à ce diamètre. Donc :

La tangente en O *à la conique* (K) *est perpendiculaire à* OM′, *ou encore* OM′ *est la normale en* O *à la conique* (K).

Prenons un diamètre quelconque CC′ de (M) et élevons en O une perpendiculaire à ce diamètre. Appelons c le point de la conique (K) qui est situé sur cette perpendiculaire : ce point c est à la rencontre de cette droite et de la perpendiculaire élevée à MC par le point γ, milieu de cette corde.

Cherchons quel est sur γc l'autre point de la conique (K).

Menons le diamètre EE′, tel que OE et MC soient également inclinées sur les axes de (M). En vertu d'un théorème bien connu, la circonférence, qui contient les points M, E, E′, contient aussi le point C. Le centre e de cette circonférence est le point cherché. Les droites oe, γc, respectivement perpendiculaires à OE et MC, sont aussi également inclinées sur les axes de (M). Il résulte de là que :

Le point e, *où la droite* γc *rencontre* (K), *est le milieu du segment intercepté sur cette droite par les axes de* (M).

Nous sommes ainsi conduits à cette deuxième génération de (K) :

La conique (K) *est le lieu des milieux des seg-*

ments, interceptés par les axes de (M), *sur les perpendiculaires élevées aux milieux des cordes de cette conique qui partent du point* M.

Lorsque l'extrémité de la corde issue du point M vient se confondre avec M, alors la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde est la normale en M à (M). Le milieu n du segment intercepté par les axes sur cette normale est alors un point de (K).

Le point γ, milieu de la corde MC, est aussi le milieu du segment intercepté sur cette droite par les asymptotes de (M). On a alors cette troisième génération de (K) :

La conique (K) *est le lieu des milieux des segments interceptés par les axes de* (M) *sur les perpendiculaires élevées aux milieux des segments, déterminés par les asymptotes de cette courbe, sur les droites issues de* M.

On peut remarquer que cette troisième génération peut être énoncée en n'employant que des droites et le point M, sans faire intervenir la conique (M).

Cherchons les points de rencontre de (K) avec les axes. Nous n'avons pour cela, en employant la première génération de (K), qu'à construire les points qui correspondent aux axes au moyen de ce théorème :

La circonférence, qui passe par les extrémités d'un axe d'une conique (M) *et par un point* M *de cette courbe, passe aussi par le pied* P *de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de* (M) *sur la tangente en* M à (M) [1].

---

[1] J'ai déjà employé ce théorème l'année dernière, à propos de la composition d'admission à l'École Polytechnique (voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878, p. 413). Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier du théorème suivant, dû à M. Laguerre : *La circonférence passant par les pieds* A_1, A_2, A_3 *des trois normales abaissées d'un point* P *sur une conique de centre* O *qui, d'après le théorème de Joachimstahl, passe par le point* A'_4 *de la conique diamétra-*

Le centre de cette circonférence est sur l'un des axes et sur la perpendiculaire à PM, élevée du milieu de ce segment. On a donc les points b et a de (K), situés sur les axes Ox et Oy, en prenant les points de rencontre de ces axes avec la perpendiculaire à PM, élevée au milieu de ce segment. Remarquons tout de suite que cette perpendiculaire passe par le point H, milieu de OM.

Il résulte de la construction de a et de b que ces points sont les milieux des segments compris entre O et les points où la normale Mn rencontre les axes.

Les points o, a, n, b sont alors les sommets d'un rectangle inscrit dans (K); donc :

Les axes de la conique (K) *sont parallèles aux axes de la conique* (M), *et le centre de* (K) *est le milieu du segment* ab.

On déduit de là que, si l'on prend les segments compris entre M et deux sommets opposés de (M), les perpendiculaires élevées aux milieux de ces segments, les parties de ces droites interceptées par les axes ont pour points milieux des sommets de (K).

On voit facilement de là que :

Après avoir tourné d'un angle droit sur son plan, la conique (K) *est homothétique à* (M).

Les longueurs des axes de la conique (K) *sont indépendantes de la position de* M *sur* (M), *ou encore les coniques* (K) *relatives aux différents points de* (M) *sont égales entre elles,* c'est-à-dire que, *lorsque* M *décrit* (M), *la conique* (K), *invariable de grandeur, se*

---

lement opposé au pied A_4 *de la quatrième normale, qu'on peut abaisser de* P, *passe aussi par le pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur la tangente à la conique au point* A'_4 [*Sur la développée de l'ellipse* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 29 janvier 1877). *Voir* aussi dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV, septembre 1878, un article de M. Gohierre de Longchamps].

transporte parallèlement à elle-même sans cesser de passer par le point O.

Pour construire un point de (K), au moyen de la première génération de cette courbe, prenons une asymptote de (M). A cette droite correspond un point de (K), situé sur une perpendiculaire à cette asymptote ; donc :

Les asymptotes de (K) *sont perpendiculaires aux asymptotes de* (M).

Comme conséquence, nous voyons que :

Les coniques (K) *et* (M) *sont de la même nature et, si* (M) *est une hyperbole équilatère*, (K) *est aussi une hyperbole équilatère.*

Nous connaissons maintenant la conique (K) de forme et de position ; nous pouvons alors prendre la suite de la question proposée.

Si autour du point O *on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique* (K) *en deux points ; prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpendiculaire au segment* OM *et passant par le milieu de ce segment.*

Le lieu dont il est question dans cette partie de l'énoncé n'est autre que la polaire d'un point F par lequel passent, en vertu du théorème de Frégier, les hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans (K) et qui ont O pour sommet commun de leur angle droit.

Ce point F est le point de rencontre de l'hypoténuse *ab* du triangle *a*O*b* et de OM′, qui est normale en O à (K). Cherchons alors la polaire du point F.

Les droites OM, OM′, étant également inclinées sur les côtés de l'angle droit *aob*, déterminent, avec les côtés *oa*, *ob* de cet angle, quatre droites qui forment un faisceau harmonique. Ces quatre droites donnent, sur la transversale ab, les quatre points a, F, b, H qui forment une division harmonique. Le point H est conjugué harmonique de F, par rapport aux points a et b; donc :

La polaire du point F *passe par le point* H, *milieu de* OM.

Le point F étant sur le diamètre ab, sa polaire est parallèle à la tangente en b à la conique (K). Cette tangente et la tangente en O à cette conique sont également inclinées sur les axes et, comme la tangente en O est perpendiculaire à OM′, la tangente en b est perpendiculaire à OM.

La polaire du point F *est donc la perpendiculaire à* OM *au milieu* H *de ce segment.*

Prenons la fin de l'énoncé de la question :

Par le point O, *on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point* O, *trois autres droites normales à la conique* (K).

1° *Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où l'on a* $A = 1$ *et* $B = 1$, *montrer qu'une seule normale est réelle et calculer les coordonnées de son pied.*

2° *Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.*

Je laisse de côté cette dernière partie, purement analytique, que l'on résout généralement dans les cours, et je vais simplement dire un mot relatif au cas où (M) est une hyperbole équilatère.

D'après ce que nous avons démontré, (K) est alors aussi une hyperbole équilatère, et il est facile de construire les axes de cette courbe et de calculer leurs longueurs.

Joignons le point O au centre I de l'hyperbole (K). Sur OI comme diamètre décrivons une circonférence de cercle. Cette courbe rencontre (K) au point L; appelons L′ le point qui sur (K) est diamétralement opposé à L.

Le triangle L′LO, inscrit dans l'hyperbole (K), est rectangle en L ; son hypoténuse, en vertu du théorème de Frégier, dont nous avons déjà fait usage, est parallèle à la normale en L à (K). Mais les normales en L et L′ à cette courbe sont parallèles entre elles : donc la droite OL′ est normale à l'hyperbole (K).

Le calcul des coordonnées du pied de cette normale est ainsi ramené au calcul des coordonnées du point de rencontre L de (K) et de la circonférence décrite sur OI comme diamètre ; car, connaissant les coordonnées de L, on a tout de suite les coordonnées de L′.

Pour terminer, je vais indiquer, sans démonstration, encore quelques remarques :

La tangente en n à la conique (K) *passe par le milieu du segment intercepté par les axes sur la tangente en* M *à la conique* (M).

Lorsque la corde MC tourne autour de M, les droites telles que γc enveloppent une courbe (S).

Le point de contact s de (S) *et de γc est sur la normale en* C *à la courbe* (M).

La courbe (S) *touche la normale* Mn *au point* μ, *qui est le centre de courbure de* (M) *sur cette droite.*

Les axes interceptent sur γc un segment dont le milieu est le point e de (K). Pour construire la tangente en e à cette courbe, on opère ainsi :

On mène la droite os. On joint le point e au milieu de os, la symétrique de cette droite, par rapport à la bissectrice de l'angle Seo, est la tangente demandée.

Cette construction, appliquée au point n, établit une liaison entre le centre de courbure μ et la tangente en n à (K).

Puisque nous connaissons cette tangente, nous pouvons déterminer μ. On arrive ainsi à la construction suivante :

Le point O *et les points où la normale* Mn *rencontre les axes sont les trois sommets d'un rectangle ; du quatrième sommet de ce rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur* OM : *cette droite coupe* Mn *au centre de courbure* μ.