NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 565-566

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__565_1>

QUESTIONS.

1354. L'équation

$$(1) \qquad x^4 - (k - b + c)x^2 + (b - 2c)ax - ck = 0,$$

dans laquelle a, b, c, k sont des entiers plus grands que zéro et satisfaisant aux conditions

$$a^2 > k > (a-1)^2,$$
$$(a-1)b \geqq (a^2 - k - 1)c,$$

ou bien aux conditions

$$(a+1)^2 > k > a^2,$$
$$(a+1)b \geqq (k - a^2 + 1)c,$$

ne peut pas avoir trois racines entières. Si deux racines sont imaginaires, l'une au moins des racines réelles est incommensurable.

La même proposition subsiste à l'égard de l'équation

$$(2) \qquad x^4 - (k - b - c)x^2 + (b + 2c)ax + ck = 0,$$

dans laquelle les entiers a, b, c, k, tous plus grands que zéro, satisfont à l'un quelconque des quatre systèmes de conditions qui suivent, savoir :

1° $\begin{cases} a^2 > c, \\ a^2 > k \geqq (a-1)^2; \end{cases}$

2° $\begin{cases} c > a^2 > k, \\ (a+1)b \geqq (a^2 - k - 1)c; \end{cases}$

3° $(a+1)^2 \geqq k > a^2 > c;$

4° $\begin{cases} c > a^2, \\ k > a^2, \\ (a-1)b \geqq (k - a^2 + 1)c. \end{cases}$

Dans chacun de ces cas, disons-nous, l'équation (2) a assurément deux racines réelles, dont l'une au moins est incommensurable. (S. Réalis.)

1353. Le volume du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, qui a pour sommets les pieds des hauteurs d'un tétraèdre donné ABCD, a pour expression

$$V \times \begin{vmatrix} 0 & \cos\eta & \cos\varepsilon & \cos\alpha \\ \cos\eta & 0 & \cos\delta & \cos\beta \\ \cos\varepsilon & \cos\delta & 0 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

en appelant V le volume du tétraèdre donné, et α, β, γ, δ, ε et η les angles dièdres de ce tétraèdre le long des arêtes BC, CA, AB, DA, DB et DC respectivement.

(Genty.)