Nouvelles annales de mathématiques

L. Maleyx

Sur l'évaluation de certains volumes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 529-551

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__529_0>

SUR L'ÉVALUATION DE CERTAINS VOLUMES;

PAR M. L. MALEYX.

Cette Note est relative à diverses expressions du volume compris entre une surface et deux plans parallèles, quand l'aire interceptée par la surface sur un plan parallèle variable est une fonction rationnelle et entière de degré m de la distance d'un point fixe à ce plan variable.

1. Soient z la distance d'un point fixe P au plan parallèle variable, d la distance du même point à un des plans extrêmes. Si nous désignons par x la distance de ce plan fixe au plan variable, nous aurons l'égalité $z = d + x$. Par hypothèse, l'aire de la section interceptée par la surface sur le plan mobile situé à la distance z du point P est représentée par $F(z)$, F étant une fonction rationnelle entière, à coefficients déterminés et de degré m. Mais on a identiquement $F(z) = F(d+x) = f(x)$; l'aire variable dont il est question est donc aussi représentée par une fonction rationnelle entière de degré m, à coefficients déterminés, de la distance de son plan à l'un des plans parallèles servant de limite au volume qu'on veut évaluer.

2. D'après ce qui précède, supposant que l'aire variable interceptée dans la surface soit représentée par

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

on établit facilement, par un moyen absolument élémentaire ou immédiatement par l'intégration d'une fonction rationnelle, que le volume qu'on veut évaluer, prenant son origine au plan fixe qu'on a choisi et limité du reste au plan parallèle variable dont la distance au premier est x, est représenté par la fonction

$$\varphi(x) = ax + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_m \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

on a ainsi une expression du volume en fonction de la distance des plans parallèles extrêmes et des $m+1$ coefficients qui définissent $f(x)$. Si, au lieu des $m+1$ coefficients qui définissent $f(x)$, on se donne $m+1$ valeurs particulières de cette fonction correspondant à $m+1$ valeurs déterminées de x, on pourra, des équations qui en résulteront, déduire les valeurs des $m+1$ coefficients inconnus, et, en les reportant dans l'expression de $\varphi(x)$, on en déduira l'expression du volume au moyen de la distance des plans parallèles extrêmes et des nombres représentant les aires de $m+1$ sections faites dans la surface et parallèlement aux bases.

3. Pour obtenir cette expression, désignant par h la hauteur ou distance des plans parallèles extrêmes, par $B_1, B_2, \ldots, B_{m+1}$ les nombres représentant les aires des sections interceptées dans la surface sur les plans parallèles à la section extrême considérée et dont les distances à cette section sont représentées par $\alpha_1 h, \alpha_2 h, \ldots, \alpha_{m+1} h$, enfin par V le volume cherché, nous aurons les égalités

$$
\begin{aligned}
B_1 &= a + a_1 h\alpha_1 + a_2 h^2 \alpha_1^2 + \ldots + a_m h^m \alpha_1^m, \\
B_2 &= a + a_1 h\alpha_2 + a_2 h^2 \alpha_2^2 + \ldots + a_m h^m \alpha_2^m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
B_{m+1} &= a + a_1 h\alpha_{m+1} + a_2 h^2 \alpha_{m+1}^2 + \ldots + a_m h^m \alpha_{m+1}^m, \\
\frac{V}{h} &= a + a_1 h \times \frac{1}{2} + a_2 h^2 \times \frac{1}{3} + \ldots + a_m h^m \times \frac{1}{m+1}.
\end{aligned}
$$

Ces égalités expriment que le système de $m+2$ équations homogènes du premier degré

$$
\begin{aligned}
B_1 z &= z_1 + \alpha_1 z_2 + \alpha_1^2 z_3 + \ldots + \alpha_1^m z_{m+1}, \\
B_2 z &= z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_2^2 z_3 + \ldots + \alpha_2^m z_{m+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
B_{m+1} z &= z_1 + \alpha_{m+1} z_2 + \alpha_{m+1}^2 z_3 + \ldots + \alpha_{m+1}^m z_{m+1}, \\
\frac{V}{h} z &= z_1 + \frac{1}{2} z_2 + \frac{1}{3} z_3 + \ldots + \frac{1}{m+1} z_{m+1}
\end{aligned}
$$

admet la solution 1, a, $a_1 h$, $a_2 h^2$, ..., $a_m h^m$, dans laquelle les valeurs de toutes les inconnues ne sont pas simultanément nulles; il en résulte que le déterminant des coefficients de ces inconnues est nul, et l'on en déduit

$$\begin{vmatrix} B_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^m \\ B_2 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^m \\ \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m+1} & 1 & \alpha_{m+1} & \alpha_{m+1}^2 & \dots & \alpha_{m+1}^m \\ \frac{V}{h} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{m+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, du premier degré par rapport à V, détermine le volume cherché et exprime qu'il est égal au produit de la hauteur h par une expression linéaire homogène des aires de $m+1$ sections planes parallèles aux bases et faites arbitrairement dans la surface, puisque les rapports α_1, α_2, ... α_{m+1} sont quelconques.

Désignons par Δ le déterminant mineur du précédent, formé en y supprimant la première colonne et la dernière ligne, et en général par Δ_k le déterminant mineur déduit de même en y supprimant la première colonne et la ligne de rang k; l'équation précédente pourra s'écrire sous la forme

$$B_1\Delta_1 - B_2\Delta_2 + B_3\Delta_3 - \dots - (-1)^{m+1} B_{m+1}\Delta_{m+1} - (-1)^{m+2}\Delta\frac{V}{h}.$$

On peut attribuer aux nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ les valeurs qu'on voudra; toutefois on ne peut en faire deux égaux entre eux, car, s'il en était ainsi, que par exemple on fît $\alpha_l = \alpha_k$, tous les déterminants mineurs qui figurent dans l'équation précédente, sauf Δ_l et Δ_k, seraient identiquement nuls comme contenant deux lignes identiques. Le premier membre de l'équation se réduirait alors à $B_l\Delta_l \pm B_k\Delta_k$ suivant que l et k seraient de même parité ou de parités différentes; or ce binôme se réduirait aussi à zéro, car de l'égalité $\alpha_l = \alpha_k$ on déduit $B_l = B_k$, et l'on voit facilement que $\Delta_l \pm \Delta_k$ est nul, que l et k soient de même parité ou de parités différentes. Dans ce cas exceptionnel, l'équation qui donne V serait identiquement satisfaite, et l'on ne pourrait en tirer la valeur de l'inconnue ; si au contraire les rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ sont finis, quelconques et tels que deux d'entre eux ne soient pas égaux, on aura toujours

$$V = (-1)^{m+2}\frac{h}{\Delta}[B_1\Delta_1 - B_2\Delta_2 + B_3\Delta_3 - \ldots - (-1)^{m+1}B_{m+1}\Delta_{m+1}].$$

4. On peut se proposer de simplifier l'expression de V, *d'une manière générale,* en diminuant le nombre des sections dont l'aire doit être calculée ; il suffit de disposer des nombres (arbitraires dans des limites déterminées) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ de manière à rendre nuls les coefficients des nombres représentant les sections qu'on ne veut pas calculer ; *d'une manière particulière à un volume,* en disposant des mêmes nombres pour introduire des sections plus faciles à calculer.

Nous allons nous occuper du premier genre de simplification en faisant varier m, degré de la fonction qui représente la section, à partir de 2 ; quant au second genre de simplification, il se présentera naturellement dans chaque cas particulier. Nous devons encore observer que toute expression de volume se rapportant à une section de degré m se rapporte également à toute section de degré inférieur.

5. *Cas où $m = 2$.* — On a dans ce cas

$$V = \frac{h}{\Delta}(B_1\Delta_1 - B_2\Delta_2 + B_3\Delta_3).$$

Le déterminant Δ est décomposable en facteurs du premier degré ; on a

$$\Delta = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

ou

$$\Delta = [\alpha_3^2 - (\alpha_2 + \alpha_1)\alpha_3 + \alpha_2\alpha_1](\alpha_2 - \alpha_1) ;$$

de cette égalité on déduit

$$\Delta_3 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_2\alpha_1\right](\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\Delta_2 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_1) + \alpha_3\alpha_1\right](\alpha_3 - \alpha_1),$$

$$\Delta_1 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_2) + \alpha_3\alpha_2\right](\alpha_3 - \alpha_2).$$

Posons $\Delta_3 = 0$; nous ne pouvons satisfaire à cette équation par la supposition $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ pour un motif donné, mais nous pouvons y satisfaire d'une infinité de manières par les valeurs inégales et finies de α_1, α_2 vérifiant l'équation $\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0$. Acceptons un tel système de valeurs de α_1, α_2 ; nous n'altérerons pas les valeurs de Δ_1, Δ_2, en retranchant du premier facteur qui entre dans leur composition le polynôme nul $\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3}$; ils deviendront alors

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \left[\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_1) - \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)\right] \\ &= \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\right)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \left[\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2) - \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)\right] \\ &= \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1).\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs de Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 dans l'expression de V ; nous aurons après simplification, et pour tous les systèmes de valeurs inégales et finies de α_1, α_2 vérifiant

$$\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0,$$

$$V = h\,\frac{B_1\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\right) - B_2\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right)}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

On peut donc évaluer le volume d'une infinité de manières au moyen de deux sections, et l'on ne peut, en général, l'évaluer au moyen d'un nombre moindre, car, si l'on voulait rendre nul l'un des coefficients de B_1, B_2, l'autre deviendrait infini.

Comme expression particulière, nous pouvons prendre deux sections à égale distance des bases ou, ce qui revient au même, du milieu de la hauteur; il suffit de prendre les valeurs de α_2, α_1 satisfaisant à la condition $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ ou $\alpha_2 + \alpha_1 = 1$ et à l'équation $\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0$. On en déduit $\alpha_2\alpha_1 = \frac{1}{6}$; α_2 et α_1 seront alors les racines de l'équation du second degré

$$X^2 - X + \frac{1}{6} = 0,$$

d'où

$$\alpha_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \alpha_1 - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \quad \text{et} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Si nous désignons par B_1, B_2 les aires des sections faites dans la surface parallèlement aux bases et à une distance du milieu de la base égale à $\frac{h}{2\sqrt{3}}$, nous aurons

$$V = h\,\frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Ces expressions, tant générale que particulière, conviennent aux troncs de pyramide et de cône à bases parallèles, au segment sphérique, au volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre, à un volume limité par une surface du second ordre et deux plans parallèles coupant la surface suivant des sections elliptiques, enfin, comme nous l'établirons à la fin du présent article, au volume compris entre deux plans parallèles et une surface réglée admettant pour directrices deux lignes planes fermées situées dans ces plans et une troisième directrice quelconque, pourvu que la génératrice reprenne sa première position quand ses points de rencontre avec les deux directrices planes ont parcouru en même temps et en entier ces deux directrices.

6. *Cas où $m = 3$.* — Dans ce cas

$$V = \frac{-h}{\Delta}(B_1\Delta_1 - B_2\Delta_2 + B_3\Delta_3 - B_4\Delta_4).$$

Décomposant Δ en facteurs du premier degré, on a

$$\Delta = (\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta = {} & [\alpha_4^3 - (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1)\alpha_4^2 + (\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1)\alpha_4 - \alpha_3\alpha_2\alpha_1] \\ & \times (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1);\end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\Delta_4 = {} & \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) - \alpha_3\alpha_2\alpha_1\right](\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1), \\ \Delta_3 = {} & \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_1)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) - \alpha_4\alpha_2\alpha_1\right](\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1), \\ \Delta_2 = {} & \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_1)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1) - \alpha_4\alpha_3\alpha_1\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1), \\ \Delta_1 = {} & \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2) - \alpha_4\alpha_3\alpha_2\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2).\end{aligned}$$

Nous pouvons simplifier l'expression de V en égalant le premier facteur de Δ_4 à zéro, et, comme ce facteur renferme trois indéterminées, nous pouvons satisfaire à cette condition d'une infinité de manières. Considérant un système de valeurs finies de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ telles que deux quelconques d'entre elles soient distinctes et qui satisfassent à l'équation

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) - \alpha_3\alpha_2\alpha_1 = 0,$$

nous pouvons, sans altérer les valeurs de Δ_1, Δ_2, Δ_3, retrancher du premier facteur de chacun d'eux le polynôme nul premier membre de l'équation précédente; on trouve ainsi, après réduction,

$$\Delta_1 = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_2) - \alpha_3\alpha_2\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2),$$

$$\Delta_2 = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_1) - \alpha_3\alpha_1\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1),$$

$$\Delta_3 = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) - \alpha_2\alpha_1\right](\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Remplaçant, dans l'expression de V, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ par leurs valeurs, on trouve après réduction

$$\begin{aligned} V = \frac{h}{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} \Big\{ & B_1\left[\alpha_3\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_2) + \frac{1}{3}\right](\alpha_3 - \alpha_2) \\ & - B_2\left[\alpha_3\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_1) + \frac{1}{3}\right](\alpha_3 - \alpha_1) \\ & + B_3\left[\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\quad + \alpha_1) + \frac{1}{3}\right](\alpha_2 - \alpha_1) \Big\}. \end{aligned}$$

Cette égalité a lieu pour tous les systèmes de valeurs finies de α_1, α_2, α_3, telles que deux quelconques d'entre elles soient distinctes, ces variables satisfaisant à l'égalité

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0.$$

Si l'on fait dans cette égalité $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, on en déduit

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 1.$$

Le volume peut donc s'évaluer au moyen de la section parallèle aux bases menée par le milieu de la hauteur et de deux autres sections parallèles à celle-là et qui en soient équidistantes; en particulier, on peut associer à la section moyenne les deux bases extrêmes en faisant $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1$, et l'on retrouve pour expression de V dans ces hypothèses

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3),$$

formule due à Maclaurin (*Fluxions*, n° 848; 1742).

On peut simplifier encore l'expression de V en égalant à zéro le coefficient de B_3 en même temps que le premier facteur de Δ_4; on arrive ainsi à déterminer α_1 et α_2 par les deux équations

$$\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0,$$

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) - \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} = 0.$$

En tenant compte de la première, la seconde se réduit à

$$\frac{1}{2}\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} = 0.$$

De ces deux équations on déduit facilement

$$\alpha_2 + \alpha_1 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_2\alpha_1 = \frac{1}{6}.$$

On peut alors réduire la précédente expression générale de V par le calcul qu'on a fait dans le cas où $m = 2$, et l'on trouve la même expression

$$V = h \times \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Donc, dans le cas où $m = 3$, on peut encore exprimer le volume au moyen de deux sections seulement ; mais cette réduction ne peut se faire que d'une seule manière, tandis que dans le cas où $m = 2$ elle est possible d'une infinité de manières. Les deux sections au moyen desquelles on peut exprimer le volume dans le cas où $m = 3$ sont encore situées à une distance du milieu de la hauteur égale à $\frac{h}{2\sqrt{3}}$. Le volume, dans le cas où $m = 3$, ne peut s'exprimer au moyen de moins de deux sections, car, après avoir réduit à deux le nombre de ces sections, les nombres qui les représentent sont affectés de coefficients déterminés.

7. Quel que soit m, on peut faire des transformations analogues à celles que nous venons de pratiquer et réduire le nombre des sections à calculer. Dans le cas général, le déterminant Δ se décompose en facteurs du premier degré, et l'on a toujours

$$\begin{aligned}\Delta = &(\alpha_{m+1} - \alpha_m)(\alpha_{m+1} - \alpha_{m-1}) \ldots \\ &\times (\alpha_{m+1} - \alpha_1)(\alpha_m - \alpha_{m-1}) \ldots (\alpha_m - \alpha_1) \ldots (\alpha_2 - \alpha_1);\end{aligned}$$

on peut effectuer le produit des m premiers facteurs d'après une loi connue et déduire du résultat les expressions de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{m+1}$, ordonnés suivant les éléments de la dernière ligne. Dans cet état, chacun des déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{m+1}$ est le produit d'un polynôme, qui se déduit du produit effectué dans Δ, par une suite de facteurs binômes ; on ne peut égaler à zéro ces facteurs binômes, car il en résulterait l'égalité de deux des rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1}$, et l'on a vu que cette égalité n'était pas permise; mais on peut égaler à zéro un ou plusieurs des facteurs polynômes, en observant que, si deux d'entre eux sont nuls, ils doivent l'être indépendamment de toute valeur particulière attribuée à une variable non commune.

En effet, chacun de ces facteurs se compose de m des $m+1$ rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$; deux d'entre eux ne diffèrent que par une de ces variables, toutes les autres étant communes et y entrant de la même manière. Ils sont du premier degré par rapport à chacune des variables qui y entrent; donc ils auront la forme $\alpha_l \mathrm{M} + \mathrm{N}$, $\alpha_k \mathrm{M} + \mathrm{N}$; ils ne peuvent donc être nuls en même temps que par les suppositions $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, sans quoi de l'égalité à zéro de ces facteurs on déduirait $\alpha_l = \alpha_k$, ce qui n'est pas permis.

La même observation s'applique à deux des équations de la forme $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, si leurs premiers membres ne diffèrent que par un des $m+1$ rapports $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$, et que les rapports communs y figurent de la même manière.

Nous allons éclaircir cela par quelques applications.

8. Proposons-nous de réduire au moindre nombre possible le nombre des sections nécessaires pour calculer le volume V dans le cas où $m = 4$. Désignant par $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$ les facteurs polynômes qui figurent respectivement dans $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, et qu'on peut rendre nuls, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_5 = {} & \alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_3\alpha_2 + \alpha_4\alpha_3\alpha_1 + \alpha_4\alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2\alpha_1) \\
& + \frac{1}{3}(\alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) \\
& - \frac{1}{4}(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

$$F_4 = \alpha_5\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_3\alpha_2 + \alpha_5\alpha_3\alpha_1 + \alpha_5\alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2\alpha_1)$$
$$+ \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_3 + \alpha_5\alpha_2 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1)$$
$$- \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{5},$$

$$F_3 = \alpha_5\alpha_4\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_4\alpha_2 + \alpha_5\alpha_4\alpha_1 + \alpha_5\alpha_2\alpha_1 + \alpha_4\alpha_2\alpha_1)$$
$$+ \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_4 + \alpha_5\alpha_2 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1)$$
$$- \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{5},$$

$$F_2 = \alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_4\alpha_3 + \alpha_5\alpha_4\alpha_1 + \alpha_5\alpha_3\alpha_1 + \alpha_4\alpha_3\alpha_1)$$
$$+ \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_4 + \alpha_5\alpha_3 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1)$$
$$- \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_1) + \frac{1}{5},$$

$$F_1 = \alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_4\alpha_3 + \alpha_5\alpha_4\alpha_2 + \alpha_5\alpha_3\alpha_2 + \alpha_4\alpha_3\alpha_2)$$
$$+ \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_4 + \alpha_5\alpha_3 + \alpha_5\alpha_2 + \alpha_4\alpha_3 + \alpha_4\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2)$$
$$- \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2) + \frac{1}{5}.$$

On peut égaler à zéro les facteurs F_5 et F_4, et pour cela, d'après le numéro précédent, il faut et il suffit que le coefficient de α_4 et le terme indépendant pris dans F_5 soient séparément nuls; on est ainsi conduit aux deux équations

$$\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{4}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{5} = 0.$$

Ces deux équations, renfermant trois variables, admettent une infinité de solutions communes, et permettent de réduire à trois et d'une infinité de manières le nombre des sections nécessaires pour évaluer V dans le cas $m = 4$. Si en particulier nous posons $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, ces équations se réduisent à

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 1,$$

$$\alpha_1 \alpha_3 - (\alpha_1 + \alpha_3) + \frac{9}{10} = 0,$$

ou, eu égard à la précédente,

$$\alpha_1 \alpha_3 = \frac{1}{10}.$$

α_1, α_3 sont donc, dans ce cas particulier, racines de l'équation du second degré $X^2 - X + \frac{1}{10} = 0$, et définissent deux sections équidistantes du milieu de la hauteur et dont la distance à ce point est $\frac{h}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$. Pour qu'on pût réduire à deux le nombre des sections nécessaires pour évaluer le volume V dans ce cas, il faudrait qu'on pût rendre nuls trois des facteurs, par exemple F_5, F_4 et F_3; ces équations exigent, d'après ce qu'on a vu au numéro précédent, qu'on puisse satisfaire aux six équations

$$(1) \quad \alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{4}(\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{5} = 0,$$

$$(3) \quad \alpha_4\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_4\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}\alpha_4\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_4\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{4}(\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{5} = 0,$$

$$(5) \quad \alpha_5\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_5\alpha_2 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{3}(\alpha_5 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{4} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{1}{2}\alpha_5\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_5\alpha_2 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1) + \frac{1}{4}(\alpha_5 + \alpha_2 + \alpha_1) - \frac{1}{5} = 0.$$

Or, d'après l'observation qui termine le numéro précédent, il faut et il suffit, pour satisfaire aux équations (1), (3), (5), de trouver des valeurs de α_1, α_2 vérifiant les deux équations

$$(7)\qquad \alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} = 0,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{2}\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} = 0,$$

et il est également nécessaire et suffisant, pour satisfaire aux équations (2), (4), (6), que ces valeurs de α_1, α_2 vérifient

$$(9)\qquad \frac{1}{2}\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{3}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{4} = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{1}{3}\alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{4}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{5} = 0.$$

Dès lors, pour qu'on pût réduire à deux le nombre des sections nécessaires pour évaluer le volume V dans le cas où $m = 4$, il serait nécessaire et suffisant que les équations (7), (8) et (10) admissent une solution commune; or il est facile de voir qu'elles n'en ont pas : donc, dans le cas où $m = 4$, on ne peut évaluer V au moyen de moins de trois sections, et on l'évalue d'une infinité de manières au moyen de trois sections.

9. En reprenant un calcul analogue dans le cas où $m = 5$, on trouve que le volume peut aussi s'exprimer au moyen de la section menée par le milieu de la hauteur et de deux sections équidistantes et qui en sont situées à la distance $\frac{h}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$. Ces résultats font supposer : 1° que les sections équidistantes du milieu de la hauteur ont une importance particulière dans la réduction du nombre des sections; 2° que le volume s'exprime de la même

manière au moyen de ces sections quand le degré de la fonction qui les représente est de la forme $2n$ et de la forme $2n+1$; 3° que la section passant par le milieu de la hauteur figure ou ne figure pas dans l'expression du volume suivant que le degré de la fonction qui représente la section est de la forme $4n$ ou de la forme $4n+1$. Nous allons mettre ces propositions en évidence. Conservons les notations précédentes sauf l'exception suivante: nous supposerons que l'aire de la section est représentée par $f(x)$, x étant compté à partir du milieu de la hauteur positivement dans un sens et négativement dans l'autre; nous désignerons la hauteur distance des plans parallèles extrêmes par $2h$; enfin nous désignerons par B_k et B_{-k} les nombres qui représentent les sections dont la distance au milieu de la hauteur est $\alpha_k h$ ou $-\alpha_k h$.

D'après cela et $2n$ étant le plus grand multiple de 2 contenu dans le degré m de la fonction représentant la section, nous aurons

$$B_k = a + a_1\alpha_k h + a_2\alpha_k^2 h^2 + \ldots + a_m\alpha_k^m h^m,$$
$$B_{-k} = a - a_1\alpha_k h + a_2\alpha_k^2 h^2 - \ldots \pm a_m\alpha_k^m h^m;$$

ajoutant et réduisant,

$$\frac{B_k + B_{-k}}{2} = a + a_2^2\alpha_k^2 h^2 + \ldots + a_{2n}\alpha_k^{2n} h^{2n}.$$

D'autre part, si nous désignons par V_1 la partie du volume située du côté des x positifs et par V_2 la partie située du côté des x négatifs, $V_1 + V_2$ étant égal à V, nous aurons

$$\frac{V_1}{h} = a + a_1\frac{h}{2} + a_2\frac{h^2}{3} + \ldots + a_m\frac{h^m}{m+1},$$
$$\frac{V_2}{h} = a - a_1\frac{h}{2} + a_2\frac{h^2}{3} + \ldots \pm a_m\frac{h^m}{m+1},$$

d'où, ajoutant,

$$\frac{V}{2h} = a + a_2 \frac{h^2}{3} + \ldots + a_{2n} \frac{h^{2n}}{2n+1}.$$

Distinguons actuellement deux cas suivant que n est de l'une des formes $2p$ ou $2p+1$.

Première forme : $n = 2p+1$, ou $m = 4p+2$ ou $4p+3$. Nous aurons les égalités

$$\frac{B_1 + B_{-1}}{2} = a + a_2 \alpha_1^2 h^2 + a_4 \alpha_1^4 h^4 + \ldots + a_{2n} \alpha_1^{2n} h^{2n},$$

$$\frac{B_2 + B_{-2}}{2} = a + a_2 \alpha_2^2 h^2 + a_4 \alpha_2^4 h^4 + \ldots + a_{2n} \alpha_2^{2n} h^{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{B_{n+1} + B_{-(n+1)}}{2} = a + a_2 \alpha_{n+1}^2 h^2 + a_4 \alpha_{n+1}^4 h^4 + \ldots + a_{2n} \alpha_{n+1}^{2n} h^{2n},$$

$$\frac{V}{2h} = a + a_2 \frac{h^2}{3} + a_4 \frac{h^4}{5} + \ldots + a_{2n} \frac{h^{2n}}{2n+1}.$$

Ces égalités sont au nombre de $n+2$ et nous avons à éliminer entre elles les $n+1$ inconnues a, $a_2 h^2, \ldots$, $a_{2n} h^{2n}$; le résultat de l'élimination est l'égalité à zéro du déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{B_1 + B_{-1}}{2} & 1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 & \ldots & \alpha_1^{2n} \\ \dfrac{B_2 + B_{-2}}{2} & 1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 & \ldots & \alpha_2^{2n} \\ \ldots\ldots & . & .. & .. & \ldots & \ldots \\ \dfrac{B_{n+1} + B_{-(n+1)}}{2} & 1 & \alpha_{n+1}^2 & \alpha_{n+1}^4 & \ldots & \alpha_{n+1}^{2n} \\ \dfrac{V}{2h} & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} & \ldots & \dfrac{1}{2n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

De cette égalité on peut tirer la valeur de V, quelsque soient les rapports $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{n+1}$, pourvu qu'on ne leur attribue que des valeurs finies et que deux d'entre eux ne soient pas égaux entre eux. Le volume sera ainsi exprimé au moyen de $2(n+1)$ sections, et, comme $m = 2n$ ou

$2n+1$, il sera exprimé au moyen de $m+2$ ou de $m+1$ sections; on pourra, du reste, faire disparaître un certain nombre de ces sections par couples en rendant nuls leurs coefficients, comme nous l'avons fait dans les numéros précédents.

Seconde forme : $n = 2p$, ou $m = 4p$ ou $4p+1$. Nous aurons les égalités suivantes, en observant que a est le nombre qui représente la section menée par le milieu de la hauteur :

$$\frac{B_1+B_{-1}}{2} - a = a_2\alpha_1^2 h^2 + a_4\alpha_1^4 h^4 + \ldots + a_{2n}\alpha_1^{2n} h^{2n},$$

$$\frac{B_2+B_{-2}}{2} - a = a_2\alpha_2^2 h^2 + a_4\alpha_2^4 h^4 + \ldots + a_{2n}\alpha_2^{2n} h^{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{B_n+B_{-n}}{2} - a = a_2\alpha_n^2 h^2 + a_4\alpha_n^4 h^4 + \ldots + a_{2n}\alpha_n^{2n} h^{2n},$$

$$\frac{V}{2h} - a = a_2\frac{h^2}{3} + a_4\frac{h^4}{5} + \ldots + a_{2n}\frac{h^{2n}}{2n+1}.$$

Ces égalités sont au nombre de $n+1$ et nous avons à éliminer entre elles les n inconnues $a_2 h^2, a_4 h^4, \ldots, a_{2n} h^{2n}$; le résultat de cette élimination est l'égalité à zéro du déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{B_1+B_{-1}}{2} - a & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 & \ldots & \alpha_1^{2n} \\ \dfrac{B_2+B_{-2}}{2} - a & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 & \ldots & \alpha_2^{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{B_n+B_{-n}}{2} - a & \alpha_n^2 & \alpha_n^4 & \ldots & \alpha_n^{2n} \\ \dfrac{V}{2h} - a & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} & \ldots & \dfrac{1}{2_{n+1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette égalité définit le volume V au moyen de $2n+1$

sections, ou, comme m est égal à $2n$ ou $2n+1$, le nombre des sections nécessaires est peut-être représenté par $m+1$ ou m, nombre qu'on peut réduire en disposant des rapports variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

10. Appliquant ces considérations au cas où m est égal à 4 ou à 5, nous nous trouvons dans le cas de la seconde forme du numéro précédent; dans ce cas, $n=2$, et le volume sera défini par l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{B_1+B_{-1}}{2}-a & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 \\ \dfrac{B_2+B_{-2}}{2}-a & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 \\ \dfrac{V}{2h}-a & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\alpha_2^2\left(\frac{B_1+B_{-1}}{2}-a\right)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} - \alpha_1^2\left(\frac{B_2+B_{-2}}{2}-a\right)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} + \alpha_1^2\alpha_2^2\left(\frac{V}{2h}-a\right)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = 0;$$

égalant à zéro le coefficient de $\dfrac{B_2+B_{-2}}{2}-a$, nous en déduisons $\alpha_1^2=\dfrac{3}{5}$; remplaçant α_1^2 par cette valeur, il vient

$$\alpha_2^2\left(\frac{B_1+B_{-1}}{2}-a\right)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} + \frac{3}{5}\alpha_2^2\left(\frac{V}{2h}-a\right)\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{3}{5} \\ 1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = 0;$$

simplifiant,

$$\left(\frac{B_1+B_{-1}}{2}-a\right)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} - \frac{9}{5}\left(\frac{V}{2h}-a\right)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2^2 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$B_1 + B_{-1} - 2a - \frac{9}{5}\frac{V}{h} + \frac{18}{5}a = 0,$$

$$V = \frac{h}{9}(5B_1 + 8a + 5B_{-1}),$$

où il faut observer que h n'est que la moitié de la hauteur; cette expression confirme bien les résultats précédents.

11. Faisons encore l'application au cas où m est égal à 6 ou à 7. Nous sommes dans le cas de la deuxième forme du n° 9; n étant égal à 3, le volume est donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{B_1 + B_{-1}}{2} & 1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 & \alpha_1^6 \\ \frac{B_2 + B_{-2}}{2} & 1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 & \alpha_2^6 \\ \frac{B_3 + B_{-3}}{2} & 1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^4 & \alpha_3^6 \\ \frac{B_4 + B_{-4}}{2} & 1 & \alpha_4^2 & \alpha_4^4 & \alpha_4^6 \\ \frac{V}{2h} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons, pour abréger, les quatre premiers éléments de la première colonne par D_1, D_2, D_3, D_4, respectivement, et conservons pour les déterminants mineurs une notation analogue à celle que nous avons employée dans les huit premiers numéros; l'équation pourra s'écrire

$$D_1\Delta_1 - D_2\Delta_2 + D_3\Delta_3 - D_4\Delta_4 + \frac{V}{2h}\Delta = 0.$$

Δ est décomposable en facteurs et peut se mettre sous la forme

$$\Delta = (\alpha_4^2 - \alpha_3^2)(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)(\alpha_4^2 - \alpha_1^2)(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2),$$

ou

$$\Delta = [\alpha_4^6 - (\alpha_3^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1^2)\alpha_4^4 \\ + (\alpha_3^2\alpha_2^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2 + \alpha_2^2\alpha_1^2)\alpha_4^2 - \alpha_3^2\alpha_2^2\alpha_1^2](\alpha_3^2 - \alpha_2^2)(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2).$$

On en déduit

$$\Delta_4 = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5}(\alpha_3^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(\alpha_3^2\alpha_2^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2 + \alpha_2^2\alpha_1^2) - \alpha_3^2\alpha_2^2\alpha_1^2\right](\alpha_3^2 - \alpha_2^2)(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2),$$

$$\Delta_3 = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5}(\alpha_4^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(\alpha_4^2\alpha_2^2 + \alpha_4^2\alpha_1^2 + \alpha_2^2\alpha_1^2) - \alpha_4^2\alpha_2^2\alpha_1^2\right](\alpha_4^2 - \alpha_2^2)(\alpha_4^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - \alpha_1^2),$$

$$\Delta_2 = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5}(\alpha_4^2 + \alpha_3^2 + \alpha_1^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(\alpha_4^2\alpha_3^2 + \alpha_4^2\alpha_1^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) - \alpha_4^2\alpha_3^2\alpha_1^2\right](\alpha_4^2 - \alpha_3^2)(\alpha_4^2 - \alpha_1^2)(\alpha_3^2 - \alpha_1^2),$$

$$\Delta_1 = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{5}(\alpha_4^2 + \alpha_3^2 + \alpha_2^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(\alpha_4^2\alpha_3^2 + \alpha_4^2\alpha_2^2 + \alpha_3^2\alpha_2^2) - \alpha_4^2\alpha_3^2\alpha_2^2\right](\alpha_4^2 - \alpha_3^2)(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)(\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Égalant à zéro Δ_4 et Δ_3, on en déduit

$$\alpha_2^2\alpha_1^2 - \frac{1}{3}(\alpha_2^2 + \alpha_1^2) + \frac{1}{5} = 0,$$

$$\frac{1}{3}\alpha_2^2\alpha_1^2 - \frac{1}{5}(\alpha_2^2 + \alpha_1^2) + \frac{1}{7} = 0;$$

on en tire

$$\alpha_2^2\,\alpha_1^2 = \frac{3}{35},$$

$$\alpha_2^2 + \alpha_1^2 = \frac{6}{7};$$

α_2^2 et α_1^2 sont alors racines de l'équation du second degré

$$X^2 - \frac{6}{7}X + \frac{3}{35} = 0,$$

d'où

$$X = \frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Les valeurs de X sont réelles et positives, et en conséquence nous trouverons pour α_1, α_2 des valeurs acceptables; le volume V s'exprimera alors au moyen de quatre sections, deux à deux équidistantes du milieu de la hauteur.

En réduisant les expressions de Δ_1, Δ_2 d'après des procédés analogues à ceux que nous avons précédemment employés, on trouve pour valeur réduite de V, en prenant $\alpha_1^2 = \frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$ et $\alpha_2^2 = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}$,

$$V = h\,\frac{(B_1 + B_{-1})(18 + \sqrt{30}) + (B_2 + B_{-2})(18 - \sqrt{30})}{36},$$

h représentant toujours la moitié de la hauteur.

12. Nous avons énoncé à la fin du n° 5 une proposition qui devient évidente au moyen du théorème suivant :

Si l'on coupe une surface réglée, à directrices quelconques, par un plan déterminant une section fermée dans la surface, l'aire de cette section est une fonction rationnelle du second degré de la distance du plan sécant à un point fixe de l'espace.

Rapportons la figure à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, se coupant au point fixe O, et tels que le plan XOY soit parallèle au plan sécant SMN. Coupons la figure par un plan fixe TA_1B_1 parallèle à XOY. Soient AA_1, BB_1 deux positions voisines de la génératrice limitée aux plans XOY, TA_1B_1; projetons-les orthogonalement sur le plan XOY suivant Aa_1, Bb_1: les points M, N, où elles sont rencontrées par le plan sécant, se projettent en m, n sur Aa_1 et Bb_1. Il est évident qu'on a les égalités de rapport suivantes :

$$\frac{Am}{ma_1}=\frac{AM}{MA_1}=\frac{OS}{ST}=\frac{BN}{NB_1}=\frac{Bn}{nb_1}.$$

Désignons par $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta, \gamma_1, \delta_1, x, y, x_1, y_1$, les distances à OY et à OX des points A, a_1, B, b_1, m, n, les huit premières étant connues et résultant de la nature de la surface, les quatre dernières restant à déterminer. Désignons encore OT par h et OS par z. Il résulte des égalités de rapport précédentes $\frac{Am}{ma_1}=\frac{Bn}{nb_1}=\frac{z}{h-z}$; d'après un théorème connu, on en déduit

$$x=\frac{\alpha(h-z)+\alpha_1 z}{h},\quad y=\frac{\beta(h-z)+\beta_1 z}{h},$$

$$x_1=\frac{\gamma(h-z)+\gamma_1 z}{h},\quad y_1=\frac{\delta(h-z)+\delta_1 z}{h}.$$

Si nous nous reportons au triangle Omn, égal au triangle SMN, on voit qu'il est équivalent à

$$\frac{1}{2}[xy+(y+y_1)(x_1-x)-x_1y_1]$$

ou, toutes réductions faites, à $\frac{1}{2}(yx_1-xy_1)$; remplaçant x, y, x_1, y_1 par leurs valeurs, on a

$$\begin{aligned}\text{SMN}=Omn=\frac{1}{2h^2}\{&[\beta(h-z)+\beta_1 z][\gamma(h-z)+\gamma_1 z]\\&-[\alpha(h-z)+\alpha_1 z][\delta(h-z)+\delta_1 z]\}.\end{aligned}$$

La surface SMN est donc une fonction rationnelle et du second degré de z, distance de son plan au point O.

Si maintenant nous supposons qu'on ait inscrit, dans la courbe de section de la surface réglée par le plan

SMN, un polygone d'un très grand nombre de côtés très petits, sa surface pourra être considérée comme la somme algébrique d'autant de triangles qu'il aura de côtés, et, comme la surface de chacun de ces triangles est une fonction du second degré de z, il en sera de même de l'aire du polygone et de sa limite, qui est l'aire de la section faite dans la surface.

N. B. — Il est presque superflu de remarquer que les calculs que nous venons d'appliquer au calcul d'un volume limité à deux plans parallèles et à une surface interceptant sur des plans parallèles à ceux-là une aire qui est représentée par une fonction rationnelle de la distance à un point fixe du plan de la section s'appliquent également, sans modification sensible, à l'évaluation d'une aire plane limitée par deux droites parallèles et par une courbe ou un système de courbes, quand la corde interceptée par cette courbe ou ce système de courbes sur une parallèle variable aux deux premières a une longueur représentée par une fonction rationnelle de la distance de cette droite variable à un point du plan de l'aire considérée.