NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LANNES

Solution des questions de mathématiques élémentaires proposées au concours général de 1879

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 508-513

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__508_0>

SOLUTION DES QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

(voir 2e série, t. XIX, p. 174);

PAR M. LANNES,
Élève du lycée de Tarbes.

I. 1° *On considère un quadrilatère* ABCD *dans lequel on a* AB = BC *et* CD = DA : *on demande de prouver que ce quadrilatère est circonscriptible à deux cercles.*
2° *On déforme ce quadrilatère de telle manière que les côtés demeurent invariables et que les points* A, B *demeurent fixes : on demande le lieu des centres des cercles inscrits aux différentes positions du quadrilatère.*

II. *Étant données les deux équations*

$$ax + by + cz = 0, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

en déduire les rapports $\frac{y}{x}, \frac{z}{y}, \frac{x}{z}$ *par des formules ne contenant pas de radicaux au dénominateur. Chercher dans quels cas les valeurs de ces rapports sont réelles.*

Première question. — 1° Il résulte des égalités supposées AB = BC, CD = DA que la diagonale BD est à la fois bissectrice des angles B, D du quadrilatère considéré. Les deux triangles ABD, CBD sont symétriques par rapport à la droite BD. Par suite, les bissectrices des angles BAD, BCD rencontrent la droite BD en un même point E, qui est le centre d'un cercle inscrit au quadrilatère.

De même, les bissectrices extérieures des angles BAD, BCD rencontreront la droite BD prolongée en un point E', également distant des quatre côtés du quadrilatère; ce point sera donc le centre d'un second cercle inscrit au quadrilatère.

2° En supposant que le quadrilatère se déforme conformément à l'énoncé, proposons-nous de trouver les *lieux géométriques des centres* E, E' *des cercles inscrits, aux différentes positions du quadrilatère.*

La droite BE étant la bissectrice de l'angle A du triangle ABD, on a

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AB}{AB + AD}$$

ou, en posant $AB = a$, $AD = b$,

$$\frac{BE}{BD} = \frac{a}{a + b},$$

où a et b sont invariables.

L'égalité de rapports $\frac{BE}{BD} = \frac{a}{a + b}$ montre que le point E décrit une ligne homothétique à celle qui est décrite par le point D. Or cette dernière est une circonférence, puisque le point A est fixe et que la valeur de AD est invariable; donc le lieu du point E est une circonférence.

Le centre de cette circonférence est, sur la droite BA, en un point I déterminé par l'égalité de rapports

$$\frac{BI}{BA} = \frac{a}{a + b}.$$

Le triangle DAE', dans lequel la droite AE' est la bissectrice extérieure de l'angle BAD, donne

$$\frac{BE'}{DE'} = \frac{a}{b},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{BE}'}{\mathrm{DE}' - \mathrm{BE}'} = \frac{a}{b-a}, \quad \frac{\mathrm{BE}'}{\mathrm{BD}} = \frac{a}{b-a}.$$

Ainsi, le point E′ décrit une ligne homothétique à celle qui est décrite par le point D, c'est-à-dire une circonférence dont le centre I′ est un point situé sur la droite AB prolongée, et déterminé par l'égalité

$$\frac{\mathrm{BI}'}{\mathrm{BA}} = \frac{a}{b-a}.$$

Le point I′ est d'ailleurs le conjugué harmonique de I par rapport aux points fixes A, B.

Calcul des rayons. — Désignons par r et r' les rayons des circonférences dont les centres sont I et I′.

On a

$$\frac{r}{b} = \frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BA}} = \frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{r'}{b} = \frac{\mathrm{BI}'}{\mathrm{BA}} = \frac{a}{b-a},$$

d'où

$$r = \frac{ab}{a+b} \quad \text{et} \quad r' = \frac{ab}{b-a}.$$

Si $b = a$, il vient

$$r = \frac{b}{2}, \quad r' = \infty.$$

Le centre I est alors au milieu de AB; son conjugué harmonique est à l'infini sur la droite BA. Le quadrilatère ABCD est un losange; la circonférence I′ n'existe plus : le quadrilatère n'est alors circonscriptible qu'à une seule circonférence.

II. *Seconde question.* — Posons $\frac{z}{y} = \alpha$, $\frac{x}{z} = 6$, $\frac{y}{x} = \gamma$.

Des deux équations données, $ax + by + cz = 0$,

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, on tire

$$ax=-(by+cz) \quad \text{et} \quad \frac{a}{x}=-\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right).$$

En multipliant membre à membre ces deux dernières équations, il vient

$$\begin{aligned} a^2=(by+cz)\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)&=b^2+c^2+bc\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\\ &=b^2+c^2+bc\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$a^2\alpha=(b^2+c^2)\alpha+bc\alpha^2+bc,$$
$$bc\alpha^2-(a^2-b^2-c^2)\alpha+bc=0,$$

équation qui donne

$$\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2\pm\sqrt{(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2}}{2bc},$$

$$\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2\pm\sqrt{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2}}{2bc}.$$

On aurait de même

$$6=\frac{b^2-a^2-c^2\pm\sqrt{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}}{2ac},$$

$$\gamma=\frac{c^2-a^2-b^2\pm\sqrt{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}}{2ab}.$$

Pour que les valeurs de α, 6, γ soient réelles, il faut que l'on ait

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 \geqq 0.$$

Or

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2,$$

et, en décomposant $(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$ en facteurs du premier degré, on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 \\ &\quad = -(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c), \end{aligned} \right.$$

ou, en posant $a + b + c = 2p$,

$$(2)\quad (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = -16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Supposons que les trois quantités a, b, c soient positives. Pour que $(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2$ soit positif, il faut et il suffit, d'après l'égalité (1), que l'une des trois quantités a, b, c soit plus grande que la somme des deux autres, ce qui est la condition de réalité des rapports $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{x}$ ou α, β, γ.

Si chacune des trois quantités a, b, c est moindre que la somme des deux autres, on pourra les considérer comme les valeurs des côtés d'un triangle, et exprimer d'une manière remarquable les quantités imaginaires α, β, γ en fonction des éléments de ce triangle.

En effet, soient s et $2p$ la surface et le périmètre du triangle dont les côtés sont a, b, c.

L'égalité

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2}}{2bc},$$

ou

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2 \pm \sqrt{-16p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2bc},$$

donnera

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2 \pm 4s\sqrt{-1}}{2bc}.$$

Remplaçons $2s$ par sa valeur $bc \sin A$, puis ajoutons et retranchons successivement au numérateur $2bc \cos A$; il en résultera

$$\alpha = \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc \cos A) - 2bc \cos A \pm 2bc \sin A \sqrt{-1}}{2bc}.$$

et, à cause de l'égalité $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, on aura

$$\alpha = -\cos A \pm \sqrt{-1}\sin A = -(\cos A \mp \sqrt{-1}\sin A);$$

de même,

$$6 = -(\cos B \pm \sqrt{-1}\sin B),$$
$$\gamma = -(\cos C \pm \sqrt{-1}\sin C).$$

Nous avons supposé a, b, c positifs; si une ou deux de ces quantités, ou toutes trois étaient négatives, la condition de réalité de α, 6, γ serait encore la même : il faut, pour que α, 6, γ soient réels, que l'une des quantités a, b, c, abstraction faite des signes, soit plus grande que la somme des deux autres.

Note. — Autre solution de M. Leinekugel.