LAGUERRE

# Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation et sur la séparation des racines

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 19 (1880), p. 49-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__49_0>

# SUR LA DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES D'UNE ÉQUATION ET SUR LA SÉPARATION DES RACINES;

Par M. LAGUERRE.

## I.

1. Étant donnée une équation du degré $m$

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle le coefficient de $x^m$ est supposé positif, Newton a fait connaître une méthode très élégante pour déterminer une limite supérieure des racines positives de cette équation; elle consiste, comme on le sait, à déterminer une quantité $a$ qui rende positives toutes les fonctions

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{m-1}(x),\ f^{m}(x).$$

L'application de la méthode de Newton ne laisse pas que d'être assez longue dans la pratique, le calcul numérique des termes de la suite

$$f(a),\ f'(a),\ \ldots,\ f^{m-1}(a),\ f^{m}(a) \tag{2}$$

étant d'autant plus pénible que la connaissance de quelques-uns des termes de cette suite ne facilite en aucune façon le calcul des autres termes.

2. En posant

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

je considérerai la suite des polynômes

$$(3)\quad \begin{cases} f_m(x) = A_0, \\ f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1, \\ f_{m-2}(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_1(x) = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}, \\ f(x) = A_0 x^m + A_1 x^m + \ldots + A_{m-1} x + A_m, \end{cases}$$

dont le dernier est précisément le premier membre de l'équation proposée.

Les valeurs que prennent ces polynômes pour une valeur donnée de la variable égale à $a$ se calculent aisément par voie récurrente; on a, en effet, la relation bien connue

$$f_i(a) = a f_{i-1}(a) + A_{m-i},$$

et les quantités

$$f_m(a),\ f_{m-1}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a)$$

se rencontrent d'elles-mêmes quand on veut obtenir le résultat de la substitution de $a$ dans $f(x)$.

Cela posé, *si un nombre positif $a$ rend positifs tous les polynômes de la suite* (3), *ce nombre est une limite supérieure des racines de l'équation $f(x) = 0$.*

On a en effet, identiquement,

$$f(x) = (x - a)[f_m(a) x^{m-1} \\ + f_{m-1}(a) x^{m-2} + \ldots + f_1(a)] + f(a),$$

et il est bien clair que, sous les conditions énoncées ci-dessus, le polynôme $f(x)$ a une valeur positive pour toutes les valeurs de $x$ supérieures à $a$; on peut même ajouter que, pour ces valeurs, $f(x)$ va toujours en croissant avec $x$, d'où il résulte que $a$ est une limite supérieure des racines de l'équation $f(x) = 0$ et de l'équation $f'(x) = 0$.

3. Pour trouver une limite supérieure des racines de l'équation (1), on essayera donc d'abord la racine $\alpha$ de l'équation

$$f_{m-1}(x) = A_0 x + A_1 = 0,$$

et l'on calculera de proche en proche les diverses expressions

$$f_{m-2}(\alpha),\ f_{m-3}(\alpha),\ \ldots;$$

ce sont, du reste, les nombres que l'on a à calculer quand on veut trouver la valeur de $f(\alpha)$.

Si tous ces nombres sont positifs, $\alpha$ est une limite des racines de l'équation proposée; sinon, on essayera le nombre entier consécutif et l'on poursuivra les opérations jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre $\beta$ tel que tous les nombres intermédiaires qui se présentent dans le calcul de $f(\beta)$ soient tous positifs.

4. Comme application, considérons l'équation

$$f(x) = x^5 - 10x^4 - 32x^3 + 7x^2 - 500x - 120 = 0,$$

à laquelle est appliquée la méthode de Newton dans l'*Algèbre* de M. Briot [1].

En cherchant le résultat de la substitution de 10 dans $f(x)$, on rencontre le nombre suivant

$$-32;$$

10 est donc trop faible.

En substituant 11, on obtient les nombres

$$+1,\ +1,\ -21;$$

ce dernier nombre étant négatif, 11 est trop faible.

---

[1] *Leçons d'Algèbre*, 8e édition, p. 298.

En substituant 12, on obtient les nombres

$$+1, \quad +2, \quad -8;$$

12 est donc trop faible.

En substituant 13, on obtient les nombres

$$+1, \quad +3, \quad +7, \quad 1183-500, \quad 13(1183-500)-120;$$

tous ces nombres étant positifs, on en conclut que 13 est une limite supérieure des racines de l'équation proposée. C'est précisément la limite entière à laquelle conduit l'application de la méthode de Newton.

## II.

5. Les signes des termes de la suite (3), dont les valeurs se présentent d'elles-mêmes quand on calcule la valeur numérique de $f(a)$, peuvent servir à déterminer une limite supérieure du nombre des racines de l'équation supérieures au nombre $a$, ce nombre étant d'ailleurs supposé positif.

On a, en effet, la proposition suivante :

*Si a est un nombre positif, le nombre des variations de la suite* (3) *est au plus égal au nombre des racines de l'équation* (1) *qui sont supérieures à a, et, s'il est plus grand, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.*

Pour la démontrer, je considère l'identité

$$\frac{f(x)}{x-a}=f_m(a)x^{m-1}+f_{m-1}(a)x^{m-2}+\ldots+f_1(a)+\frac{f(a)}{x-a};$$

pour des valeurs de $x$ supérieures à $a$, le second membre est développable en une série convergente procédant suivant les puissances décroissantes de $x$, et l'on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{x-a} &= f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots \\ &\quad + f_1(a) + \frac{f(a)}{x} + \frac{af(a)}{x^2} + \frac{a^2f(a)}{x^3} + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Comme je l'ai démontré dans une Note antérieure, *Sur la règle des signes de Descartes* [1], le nombre des racines de l'équation (1) qui sont supérieures à $a$ est au plus égal au nombre des variations de la série qui compose le second membre de la relation (4). Ce nombre est d'ailleurs le même que le nombre des variations de la suite (3); la proposition est donc démontrée.

6. Comme application, je considérerai l'équation

$$(5)\qquad x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0,$$

étudiée par M. Briot dans ses *Leçons d'Algèbre* (p. 326).

En calculant successivement le résultat de la substitution dans le premier membre de l'équation (1) des nombres 0, 1, 2 et 3, on forme le Tableau suivant :

| $x$. | $f_5(x)$. | $f_3(x)$. | $f_2(x)$. | $f_1(x)$. | $f(x)$. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $+1$ | $-3$ | $+1$ | $-8$ | $-10$ |
| $+1$ | $+1$ | $-2$ | $-1$ | $-9$ | $-19$ |
| $+2$ | $+1$ | $+1$ | $+3$ | $-2$ | $-14$ |
| $+3$ | $+1$ | $+6$ | $+19$ | $+49$ | $+137$ |

Tous les nombres relatifs à $+3$ étant positifs, on en conclut d'abord que $+3$ est une limite supérieure des racines de l'équation (5) ; c'est le résultat auquel arrive M. Briot en groupant les termes du premier membre de

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVIII, p. 3.

l'équation de la façon suivante :

$$(x^5 - 3x^3 - 8x - 10) + x^2.$$

De plus, les nombres relatifs à $+2$ présentant une seule variation, on est certain qu'il y a une racine entre $+2$ et $+3$, et qu'il n'y en a qu'une ; M. Briot arrive aussi à cette conclusion en étudiant la dérivée de l'équation proposée.

D'ailleurs, les nombres relatifs à $+1$ ne présentant non plus qu'une seule variation, on en conclut qu'il n'y a aucune racine entre $+1$ et $+2$, et, comme il est presque évident que, quand $x$ varie entre $0$ et $+1$, le premier membre de l'équation (5) demeure négatif, on voit que cette équation a une seule racine positive comprise entre $+2$ et $+3$.

## III.

7. Des considérations semblables permettent de déterminer une limite supérieure du nombre des racines comprises entre deux nombres *positifs* $a$ et $b$.

Soit, en effet, l'équation

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Supposons $a < b$ et effectuons la division de $f(x)$ par le trinôme $(x-a)(x-b)$ ; en désignant par $Mx + N$ le reste de la division, nous obtiendrons un résultat de la forme suivante :

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} = \varphi(x) + \frac{Mx + N}{(x-a)(x-b)}.$$

Mettons la fraction $\dfrac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}$ sous la forme

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$

où, comme il est facile de le voir,

$$A = -\frac{f(a)}{b-a} \quad \text{et} \quad B = \frac{f(b)}{b-a};$$

la relation précédente devient

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} &= \varphi(x) + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \\ &= \varphi(x) + \frac{A}{x}\frac{1}{1-\frac{a}{x}} - \frac{B}{b}\frac{1}{1-\frac{x}{b}}.\end{aligned}$$

Pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $a$ et $b$, la fraction $\frac{1}{1-\frac{a}{x}}$ est développable suivant les puissances décroissantes de $x$, et la fraction $\frac{1}{1-\frac{x}{b}}$ suivant les puissances croissantes de $x$. Si l'on effectue ces deux développements, le nombre des racines de l'équation (1) comprises entre $a$ et $b$ est, comme je l'ai montré dans ma Note déjà citée, au plus égal au nombre des variations présentées par la série ainsi obtenue; on peut d'ailleurs remarquer que tous les termes dans lesquels $x$ a un exposant négatif ont le même signe que $\frac{A}{x}$, et que tous les termes dans lesquels $x$ a un exposant supérieur à $(m-1)$ ont le même signe que $-B$.

D'où la proposition suivante :

*En désignant par a et b deux nombres positifs dont le plus grand soit b, effectuons la division de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$; soient $\varphi(x)$ le polynôme du degré $(m-2)$ qui constitue la partie entière du quotient, et*

$Mx + N$ *le reste de la division. Décomposons la fraction*

$$\frac{Mx + N}{(x-a)(x-b)}$$

*en éléments simples, en sorte que l'on ait*

$$\frac{Mx + N}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

*Soit* $\psi(x)$ *l'ensemble des termes dont le degré est inférieur à* $m$ *dans le développement de* $\frac{B}{x-b}$ *suivant les puissances croissantes de* $x$.

*Cela posé, si l'on ordonne suivant les puissances décroissantes de* $x$ *le polynôme*

$$\varphi(x) + \psi(x)$$

*et si l'on ajoute à la suite de ce polynôme le terme* $\frac{A}{x}$, *le nombre des variations que présente la suite ainsi obtenue est au plus égal au nombre des racines de l'équation* (1) *qui sont comprises entre* $a$ *et* $b$, *et, si ces deux nombres sont différents, ils diffèrent d'un nombre pair.*

8. L'application de la proposition précédente, qui n'exige guère que la division de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, me paraît devoir être plus facile que celle de la méthode due à Budan et à Fourier, laquelle exige le calcul pénible des nombres

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots$$

et

$$f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ \ldots.$$

Comme application, je considérerai l'équation

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0,$$

que j'ai déjà traitée plus haut.

Pour avoir une limite du nombre des racines comprises entre $+1$ et $+2$, je divise $f(x)$ par $x^2 - 3x + 2$. On a

$$\frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = x^3 + 3x^2 + 4x + 7 + \frac{5x - 24}{x^2 - 3x + 2}$$
$$= x^3 + 3x^2 + 4x + 7 + \frac{19}{x - 1} - \frac{14}{x - 2}.$$

En développant $-\frac{14}{x - 2}$ suivant les puissances croissantes de $x$, l'ensemble des termes du quatrième degré dans le développement est

$$7 + \frac{7x}{2} + \frac{7x^2}{4} + \frac{7x^3}{16} + \frac{7x^4}{32}.$$

Si nous considérons maintenant la suite des termes de l'expression

$$\frac{7}{32}x^4 + \left(\frac{7}{16} + 1\right)x^3 + \left(\frac{7}{4} + 3\right)x^2 + \left(\frac{7}{2} + 4\right)x + 14 + \frac{19}{x},$$

comme elle ne présente aucune variation, nous en concluons que l'équation proposée ne renferme aucune racine entre $+1$ et $+2$.