

CH. BIEHLER

**Théorie des points singuliers dans les  
courbes algébriques**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 19  
(1880), p. 492-507

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1880\\_2\\_19\\_\\_492\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__492_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES ALGÈBRIQUES;

PAR M. CH. BIEHLER.

---

### PREMIÈRE PARTIE.

1. Nous considérons d'abord le cas où le point singulier est à distance finie, à l'origine des coordonnées. Soit  $F(x, y) = 0$  l'équation de la courbe que nous supposons de degré  $m$ , et soit, d'une manière générale,  $f_\mu(x, y)$  l'ensemble homogène des termes de degré  $\mu$  dans  $F(x, y)$ ; le premier membre de l'équation de la courbe pourra s'écrire

$$(1) \quad F(x, y) = f_p(x, y) + f_{p+1}(x, y) + \dots + f_m(x, y),$$

$p$  étant le degré des termes de moindre degré dans l'équation. Nous supposons que  $p$  est au moins égal à 1, c'est-à-dire que la courbe  $F(x, y) = 0$  passe à l'origine des coordonnées.

Cela posé, nous allons étudier la courbe dans le voisinage de l'origine.

A cet effet, coupons la courbe par la droite  $y = \lambda x$ ; l'équation qui donne les abscisses des points communs à



ou encore

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon \left[ \varphi'_p(\lambda_0) + \dots + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p!} \varphi^{(p)}(\lambda_0) + x \varphi'_{p+1}(\lambda_0) + \dots \right] \\ &\quad + x^q [\varphi_{p+q}(\lambda_0) + \varepsilon \varphi'_{p+q}(\lambda_0) + \dots] = 0. \end{aligned} \right.$$

$\lambda_0$  étant racine simple de l'équation  $\varphi_p(\lambda) = 0$ ,  $\varphi'_p(\lambda_0)$  est différent de zéro et les termes qui suivent  $\varphi'_p(\lambda_0)$  dans les premières parenthèses renferment tous soit  $x$ , soit  $\varepsilon$  en facteur; il en est de même pour les termes renfermés dans les secondes parenthèses, à l'exception du premier. Or, quand  $\varepsilon$  est nul, l'équation (6) acquiert  $q$  racines nulles en  $x$ ; par suite, quand  $\varepsilon$  tend vers zéro,  $q$  racines de l'équation (6) tendent vers zéro; l'équation (6) peut s'écrire

$$(7) \quad \varepsilon [\varphi'_p(\lambda_0) + \alpha] + x^q [\varphi_{p+q}(\lambda_0) + \beta] = 0,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant une somme d'un nombre fini de termes renfermant soit  $x$ , soit  $\varepsilon$  en facteur. Si l'on donne à  $\varepsilon$  une valeur très petite et déterminée et que l'on remplace  $x$  dans le premier membre de l'équation (7) par l'une des racines de cette même équation, l'équation (7) deviendra une identité, et l'on aura identiquement

$$(8) \quad x^q = - \frac{\varphi'_p(\lambda_0) + \alpha}{\varphi_{p+q}(\lambda_0) + \beta} \times \varepsilon.$$

Si l'on substitue à la place de  $x$  l'une des  $q$  racines voisines de zéro, les quantités  $\alpha$  et  $\beta$ , qui renferment toutes soit  $\varepsilon$ , soit  $x$  en facteur, deviennent aussi petites que l'on voudra, et une valeur approchée de l'une quelconque de ces racines sera donnée par l'équation (8), dans laquelle on fera  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ .

Les  $q$  racines voisines de zéro seront donc données par l'équation

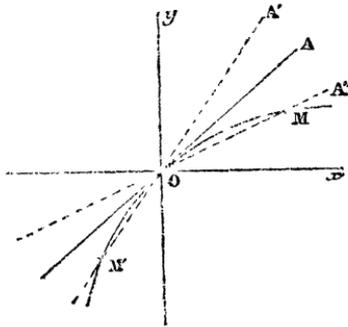
$$(9) \quad x^q = - \frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)} \times \varepsilon.$$

Supposons  $q$  impair; l'équation (9) n'aura jamais qu'une seule racine réelle, et, pour des valeurs de  $\varepsilon$  positives, cette racine sera d'un signe contraire à celui de  $\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)}$ .

L'interprétation géométrique des considérations précédentes est très aisée.

Soient (fig. 1)  $Ox$ ,  $Oy$  les axes de coordonnées,  $OA$  la droite dont le coefficient angulaire est  $\lambda_0$ ,  $OA'$  la

Fig. 1.

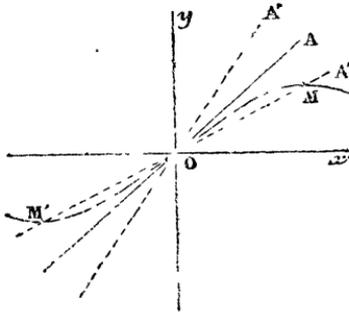


droite dont le coefficient angulaire est  $\lambda_0 + \varepsilon$ ; dans l'hypothèse de  $q$  impair, une seule racine réelle de l'équation (7) tend vers zéro, c'est-à-dire qu'une seule branche réelle passe à l'origine. Supposons que le rapport  $\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)}$  soit positif, la racine réelle infiniment petite sera négative, et l'on aura sur la sécante  $OA'$  un seul point  $M'$  de la courbe dans le voisinage de l'origine. Quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, la sécante  $OA'$  tend vers  $OA$  et le point  $M'$  tend indéfiniment vers le point  $O$ ; la droite  $OA$  est donc tangente à la courbe  $M'O$  engendrée par le point  $M$ , et cette courbe est tout entière située au-dessous de sa tangente.

Si maintenant on donne à  $\varepsilon$  des valeurs négatives, la racine réelle infiniment petite de l'équation (7) est positive; on obtient sur la sécante  $OA''$  un point  $M$  situé dans la région positive des  $x$ ; quand  $\varepsilon$  tend vers zéro par valeurs négatives, le point  $M$  engendre la branche  $MO$ , qui est également tangente en  $O$  à la droite  $OA$ . La racine infiniment petite réelle de l'équation (7) donne donc la branche  $M'OM$ , et le signe du rapport  $\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)}$  donne la position de la courbe par rapport à la tangente.

Supposons maintenant  $q$  pair et  $\frac{\varphi'_p(\lambda_0)}{\varphi_{p+q}(\lambda_0)}$  positif; pour des valeurs positives de  $\varepsilon$ , toutes les racines infiniment petites de l'équation (7) sont imaginaires; la sécante  $OA'$  ne rencontre donc pas la courbe dans le voisinage du point  $O$ . Mais si l'on donne à  $\varepsilon$  des valeurs négatives, deux des racines infiniment petites de l'équation (7) sont réelles; l'une d'elles est positive et l'autre négative. On obtient donc sur la sécante  $OA''$  deux points  $M$  et  $M'$  (*fig. 2*) situés de part et d'autre de l'origine. Quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, les deux points  $M$  et  $M'$  se rapprochent

Fig. 2.

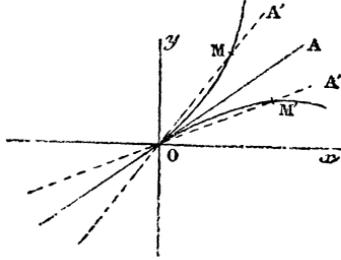


de l'origine et engendrent la courbe  $MOM'$  tangente en  $O$  à la droite  $OA$ . Cette droite  $OA$  est une tangente d'inflexion.



—  $\frac{\varphi_p''(\lambda_0)}{\varphi_{p+1}(\lambda_0)}$ . On obtient donc une courbe telle que MOM' (fig. 3), située de part et d'autre de la droite OA et dans la région des  $x$  positifs; le point O est un point de rebroussement de première espèce.

Fig. 3.



Ce que l'on vient de trouver s'applique à toutes les racines doubles de l'équation

$$\varphi_p(\lambda) = 0$$

qui n'annulent pas la fonction  $\varphi_{p+1}(\lambda)$ .

4. Considérons maintenant le cas où  $\varphi_{p+1}(\lambda_0) = 0$  et  $\varphi'_{p+1}(\lambda_0) \geq 0$ , ainsi que  $\varphi_{p+2}(\lambda_0) \geq 0$ ;  $\lambda_0$  étant supposé racine double de  $\varphi_p(\lambda) = 0$ , on a toujours  $\varphi_p''(\lambda_0) \geq 0$ .

L'équation (5) prendra la forme

$$(14) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi_p''(\lambda_0) + x \varepsilon \varphi'_{p+1}(\lambda_0) + x^2 \varphi_{p+2}(\lambda_0) + \gamma = 0,$$

$\gamma$  étant une somme de termes qui renferment tous soit  $x^2$ , soit  $\varepsilon^2$  en facteur.

Posons

$$x = \xi \varepsilon,$$

$\xi$  étant une nouvelle fonction de  $\varepsilon$ ; si l'on substitue cette valeur de  $x$  dans (14), le premier membre de l'équation sera divisible par  $\varepsilon^3$  et l'équation (14) deviendra

$$(15) \quad \frac{1}{1.2} \varphi_p''(\lambda_0) + \xi \varphi'_{p+1}(\lambda_0) + \xi^2 \varphi_{p+2}(\lambda_0) + \gamma' = 0,$$

$\gamma'$  étant une somme de termes qui renferment tous  $\varepsilon$  en facteur. Quand  $\varepsilon$  est très petit, la fonction  $\xi$  a une valeur aussi voisine que l'on veut de la valeur de l'une des racines de l'équation du deuxième degré

$$(16) \quad \frac{1}{1.2} \varphi''(\lambda_0) + \xi \varphi'_{p+1}(\lambda_0) + \xi^2 \varphi_{p+2}(\lambda_0) = 0.$$

Soient  $\xi_0$  et  $\xi_1$  les racines de l'équation (16).

1° Supposons  $\xi_0$  et  $\xi_1$  réelles et inégales. Les deux racines de l'équation en  $x$  qui tendent vers zéro avec  $\varepsilon$  auront pour valeurs approchées

$$x = \xi_0 \varepsilon, \quad x = \xi_1 \varepsilon.$$

Par suite, si  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont de même signe, la courbe présentera dans le voisinage du point O et de la tangente OA la disposition de la *fig. 4* ( $\xi_0$  et  $\xi_1$  étant suppo-

Fig. 4.

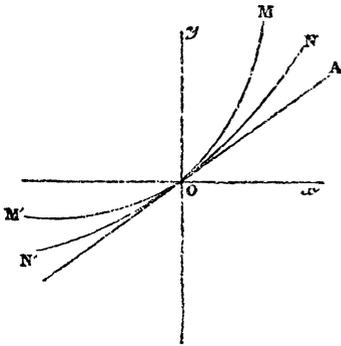
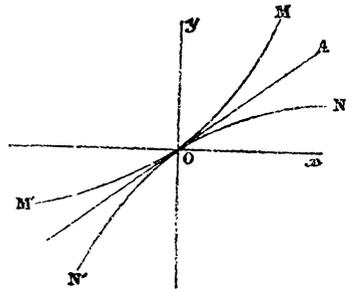


Fig. 5.



sés positifs), et la disposition de la *fig. 5* si  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont de signes contraires.

2° Supposons que les racines de l'équation (16) soient imaginaires; l'équation (15) ne pourra pas être satisfaite pour des valeurs infiniment petites de  $\varepsilon$ , car, pour ces valeurs,  $\gamma'$  est aussi voisin de zéro que l'on veut et le pre-

mier membre de l'équation (16) conserve toujours une valeur finie. Dans ce cas, il n'y a pas de branches réelles tangentes à la droite OA ; au point O se croisent deux branches de courbes imaginaires tangentes à OA. Si les racines de l'équation  $\varphi_p(\lambda) = 0$ , autres que  $\lambda_0$ , ne donnent pas non plus de branches réelles, le point O sera un point isolé.

3° Supposons enfin que les racines de l'équation (16) soient égales. L'équation (15) prendra la forme

$$\varphi_{p+2}(\lambda_0)(\xi - \xi_0)^2 + A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\varepsilon^3 + \dots = 0,$$

et, par suite,

$$\xi - \xi_0 = \pm \sqrt{-\frac{A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \dots}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}};$$

les deux valeurs de  $\xi$  qui ont pour limite  $\xi_0$  ont pour valeurs approchées

$$\xi = \xi_0 \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}} \varepsilon,$$

en supposant  $A \geq 0$ .

$\varepsilon$  ne pourra recevoir que des valeurs de signe contraire à  $\frac{A}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}$ , et les valeurs correspondantes de  $x$  sont

$$x = \xi_0 \varepsilon \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}} \varepsilon^2.$$

A ces deux racines correspondent deux branches tangentes à OA, mais du même côté de OA ; le point O est un point de rebroussement de seconde espèce (*fig. 6*).

Si A est nul, les valeurs approchées de  $x$  prennent la forme

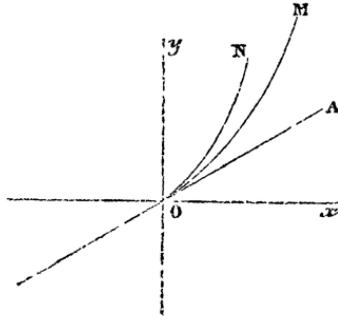
$$x = \left[ \xi_0 \pm \sqrt{\frac{-B}{\varphi_{p+2}(\lambda_0)}} \right] \varepsilon.$$

Si la quantité sous le radical est négative, le point O est isolé ; si elle est positive, les deux racines infiniment pe-

ites donnent deux branches qui offrent la disposition de la *fig. 4*, ou celle de la *fig. 5*.

Si B est nul sans que C le soit, la courbe a la forme de la *fig. 6*, et ainsi de suite.

Fig. 6.



5. En admettant toujours que  $\lambda_0$  soit racine double de l'équation  $\varphi_p(\lambda_0) = 0$ , supposons que l'on ait d'une manière générale

$$\varphi_{p+1}(\lambda_0) = 0, \quad \varphi_{p+2}(\lambda_0) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{p+N-1}(\lambda_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{p+N}(\lambda_0) \geq 0,$$

$$\varphi'_{p+1}(\lambda_0) = 0, \quad \varphi'_{p+2}(\lambda_0) = 0, \quad \dots, \quad \varphi'_{p+N-1}(\lambda_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_{p+N}(\lambda_0) \geq 0;$$

l'équation (5) prendra la forme

$$(17) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi''_p(\lambda_0) + \varepsilon x^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + x^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta = 0,$$

$\delta$  étant une somme d'un nombre fini de termes qui sont tous infiniment petits devant l'un des trois termes qui sont en évidence.

Il est aisé de voir que l'équation (17) a la forme la plus générale que l'on puisse donner à (5).

Nous supposons d'abord  $n \geq N$ ; l'hypothèse de  $n \geq N$  réduit l'équation (17) à la forme

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi''_p(\lambda_0) + x^n \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta_1 = 0.$$

Si  $N$  est impair, on obtient une sorte de rebroussement de première espèce (*fig. 3*).

Si  $N$  est pair, le point  $O$  est isolé si  $\varphi''_p(\lambda_0)$  et  $\varphi_{p+N}(\varphi_0)$  sont de même signe, et la courbe présente la disposition de la *fig. 5* si  $\varphi''_p(\lambda_0)$  et  $\varphi_{p+N}(\lambda_0)$  sont de signes contraires.

Soit actuellement  $n < N$ .

Changeons de variable et posons

$$x = \xi \times \varepsilon^\mu,$$

l'équation (17) prendra la forme

$$(18) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi''_j(\lambda_0) + \varepsilon^{n\mu+1} \xi^n \varphi'_{j+n}(\lambda_0) + \varepsilon^{N\mu} \xi^N \varphi_{j+N}(\lambda_0) + \delta' = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite par des valeurs réelles ou imaginaires de  $\xi$  et par suite de  $x$ , il faut que deux des trois exposants de  $\varepsilon$ , savoir

$$2, \quad n\mu + 1, \quad N\mu,$$

soient égaux; autrement, l'équation (18), débarrassée d'une certaine puissance de  $\varepsilon$ , deviendrait impossible, un terme fini ne pouvant se réduire avec une somme finie de termes tous infiniment petits.

On aura donc, soit

$$2 = n\mu + 1,$$

ou bien

$$2 = N\mu,$$

ou enfin

$$n\mu + 1 = N\mu.$$

1° L'hypothèse  $2 = n\mu + 1$  donne

$$n\mu = 1, \quad \mu = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad N\mu = \frac{N}{n}.$$

L'équation (18) deviendra donc, après la suppression

du facteur  $\varepsilon^2$ ,

$$(19) \quad \frac{1}{1.2} \varphi''(\lambda_0) + \xi^n \varphi'_{\rho+n}(\lambda_0) + \varepsilon^{\frac{N}{n}-2} \xi_N \varphi_{\rho+N}(\lambda_0) + \delta'' = 0.$$

Si  $\frac{N}{n} < 2$ , l'équation (19) est impossible.

Si  $\frac{N}{n} = 2$ , l'équation (18) devient

$$(20) \quad \frac{1}{1.2} \varphi''(\lambda_0) + \xi^n \varphi'_{\rho+n}(\lambda_0) + \xi^{2n} \varphi_{\rho+2n}(\lambda_0) + \delta'' = 0;$$

les  $2n$  valeurs approchées de  $\xi$  sont données par l'équation trinôme

$$\frac{1}{1.2} \varphi''(\lambda_0) + \xi^n \varphi'_{\rho+n}(\lambda_0) + \xi^{2n} \varphi_{\rho+2n}(\lambda_0) = 0.$$

Supposons  $n$  pair.

Cette équation est du second degré en  $\xi^n$ .

1° Si les racines de cette équation du second degré sont

Fig. 7.

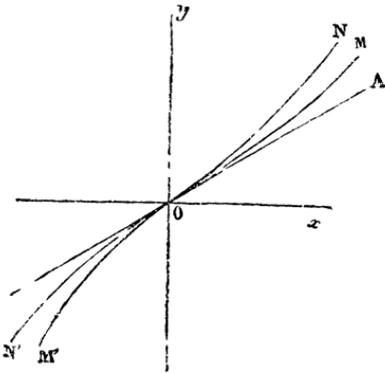
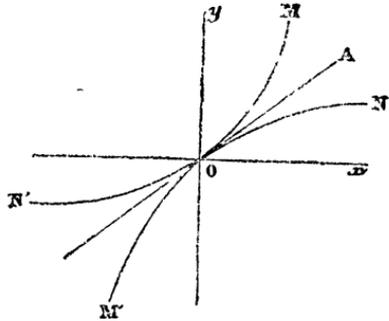


Fig. 8.



réelles et inégales, soient  $\xi_0$  et  $\xi_1$ , les valeurs approchées des racines de l'équation en  $x$  sont

$$x = \sqrt[n]{\xi_0 \varepsilon},$$

$$x = \sqrt[n]{\xi_1 \varepsilon};$$

par suite, si  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont de même signe, la courbe affecte la forme de la *fig. 7*; si  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont de signes contraires, la courbe aura une forme analogue à celle de la *fig. 8*.

2° Si les racines de l'équation du second degré en  $\xi^n$  sont imaginaires, le point O est isolé, à moins que d'autres branches réelles provenant de racines différentes de  $\lambda_0$  ne se croisent au point O.

3° Si les racines de l'équation du second degré en  $\xi^n$  sont égales, l'équation (20) prend la forme

$$\varphi_{p+2n}(\lambda_0)(\xi^n - \xi_0)^2 + A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \dots = 0$$

ou

$$\xi^n = \xi_0 \pm \sqrt{-\frac{A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \dots}{\varphi_{p+2n}(\lambda_0)}};$$

les valeurs approchées de  $\xi^n$  sont donc

$$\xi^n = \xi_0 \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_{p+2n}(\lambda_0)}} \varepsilon.$$

Si A est différent de zéro,  $n$  étant pair, on obtient pour  $\xi$  quatre valeurs réelles infiniment peu différentes de  $\sqrt[n]{\xi_0}$  si  $\xi_0$  est positif.

Si  $\xi_0$  est négatif, les racines sont toutes imaginaires.

Si  $\xi_0$  est positif, la courbe affecte une forme analogue à celle de la *fig. 9*.

Si  $n$  est impair, la forme affectée par la courbe dans le cas où les racines de l'équation en  $\xi^n$  sont réelles et inégales est analogue à celle des *fig. 4* ou *5*.

Examinons enfin la troisième hypothèse, savoir  $\frac{N}{n} > 2$ ; l'équation (19) devient alors

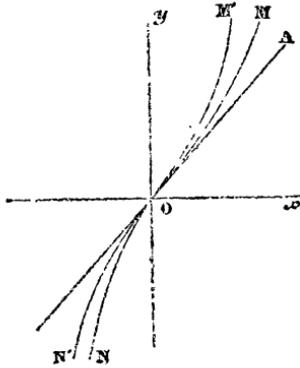
$$\frac{1}{1.2} \varphi_p''(\lambda_0) + \xi^n \varphi_{p+n}'(\lambda_0) + \delta''' = 0,$$

$\delta'''$  étant une somme de termes qui s'évanouissent avec  $\varepsilon$ ,

et les valeurs approchées de  $\xi$  sont données par l'équation

$$\frac{1}{1.2} \varphi_p''(\lambda_0) + \xi^n \varphi_{p+n}'(\lambda_0) = 0.$$

Fig. 9.



Si  $n$  est pair, les racines infiniment petites, dont la valeur approchée a pour expression

$$x = \sqrt[n]{\frac{-\varphi_p''(\lambda_0)}{\varphi_{p+n}'(\lambda_0)} \varepsilon},$$

fournissent une branche de courbe qui a, par rapport à la tangente OA, la disposition présentée par la *fig. 2*.

Faisons maintenant la seconde hypothèse sur les exposants de  $\varepsilon$ , savoir

$$2 = N\mu.$$

On en tire

$$\mu = \frac{2}{N};$$

l'exposant  $n\mu + 1$  devient, par suite,

$$\frac{2n}{N} + 1.$$

Pour que l'équation soit possible, il faut que

$$\frac{2n}{N} + 1 \geq 2,$$

par suite  $N \leq 2n$ .

Si donc  $N < 2n$ , il ne sera pas possible d'égaliser les exposants 2 et  $n\mu + 1$ , mais on pourra égaliser 2 à  $N\mu$ ; l'équation (18) devient, dans ce dernier cas,

$$\frac{1}{1.2} \varphi_p''(\lambda_0) + \xi^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta^{1v} = 0,$$

et les racines infiniment petites, au nombre de  $N$ , auront pour expression

$$x = \sqrt[N]{\frac{-\varphi_p''(\lambda_0)}{\varphi_{p+N}(\lambda_0)} \varepsilon^2}.$$

Si  $N$  est pair et si  $\frac{\varphi_p''(\lambda_0)}{\varphi_{p+N}(\lambda_0)} > 0$ , les  $n$  racines sont imaginaires et il ne correspond aucune branche réelle à ces racines.

Mais, si  $N$  est pair et si  $\frac{\varphi_p''(\lambda_0)}{\varphi_{p+N}(\lambda_0)} < 0$ , deux des racines infiniment petites sont réelles et donnent une disposition analogue à celle de la *fig.* 8.

Examinons enfin le cas où

$$n\mu + 1 = N\mu,$$

$$\mu = \frac{1}{N - n};$$

pour que l'équation (18) soit possible, il faut que  $N\mu \leq 2$  ou bien

$$\frac{N}{n} \geq 2;$$

l'équation (18) devient alors

$$\xi^n \varphi_{p+n}'(\lambda_0) + \xi^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) + \delta^{1v} = 0,$$

et les valeurs approchées de  $\xi$  sont données par l'équation

$$\xi^n \varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \xi^N \varphi_{p+N}(\lambda_0) = 0,$$

qui donne  $\xi^n = 0$  avec

$$\varphi'_{p+n}(\lambda_0) + \xi^{N-n} \varphi_{p+N}(\lambda_0) = 0.$$

Dans le cas de  $\frac{N}{n} > 2$ , nous avons déjà trouvé  $n$  racines infiniment petites dont l'expression approchée est

$$x = \sqrt[n]{-\frac{\varphi''_p(\lambda_0)}{\varphi'_{p+n}(\lambda_0)}} \varepsilon;$$

les  $N - n$  autres racines sont données en valeur approchée par la formule

$$x = \sqrt[N-n]{-\frac{\varphi_{p+n}(\lambda_0)}{\varphi_{p+N}(\lambda_0)}} \varepsilon;$$

elles se construisent comme les précédentes.

Toutes les racines doubles de l'équation  $\varphi_p(\lambda) = 0$  donnent lieu à une discussion semblable.

Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse, mais on voit aisément la marche qu'il faut suivre dans les cas plus complexes d'une racine triple, etc.

L'analyse complète des racines infiniment petites d'une équation algébrique de la forme (5) et l'étude de toutes les circonstances qui peuvent se présenter ont été faites par M. Puiseux dans son beau Mémoire sur les fonctions algébriques.

Le cas où le point multiple à étudier n'est pas à l'origine se ramène immédiatement au cas précédent par une transformation qui équivaut à une translation des axes.