Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 458-479

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__458_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1296

(voir 2e série, t. XVII, p. 526);

PAR M. SONDAT.

Si les égalités

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 = 0, \quad A\alpha'^3 + B\beta'^3 + C\gamma'^3 = 0$$

représentent deux solutions connues et distinctes de l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 0,$$

une troisième solution sera donnée par les formules

$$\begin{aligned} x &= B\beta\beta'(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + C\gamma\gamma'(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma), \\ y &= C\gamma\gamma'(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + A\alpha\alpha'(\beta\alpha' - \beta'\alpha), \\ z &= A\alpha\alpha'(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + B\beta\beta'(\gamma\beta' - \gamma'\beta). \end{aligned}$$

(REALIS.)

Des deux égalités admises on tire

$$(1) \qquad \frac{A}{\beta^3\gamma'^3 - \beta'^3\gamma^3} = \frac{B}{\gamma^3\alpha'^3 - \gamma'^3\alpha^3} = \frac{C}{\alpha^3\beta'^3 - \alpha'^3\beta^3} = \lambda,$$

et si, pour abréger, on pose

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = P, \quad \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = Q, \quad \beta\gamma' - \beta'\gamma = R,$$

on aura

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \lambda PQR(\alpha^2\beta'\gamma' - \alpha'^2\beta\gamma), \\ y &= \lambda PQR(\beta^2\alpha'\gamma' - \beta'^2\alpha\gamma), \\ z &= \lambda PQR(\gamma^2\alpha'\beta' - \gamma'^2\alpha\beta). \end{aligned} \right.$$

Remplaçant dans l'équation proposée A, B, C par les valeurs (1) et x, y, z par les valeurs (2), il vient l'identité

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(\beta^3\gamma'^3-\beta'^3\gamma^3)(\alpha^2\beta'\gamma'-\alpha'^2\beta\gamma)^3\\ &\quad+(\gamma^3\alpha'^3-\gamma'^3\alpha^3)(\beta^2\alpha'\gamma'-\beta'^2\alpha\gamma)^3\\ &\quad+(\alpha^3\beta'^3-\alpha'^3\beta^3)(\gamma^2\alpha'\beta'-\gamma'^2\alpha\beta)^3=0,\end{aligned}\right.$$

qu'on peut établir en développant.

La proposition est ainsi établie.

Question 1312

(voir 2e série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. MARCELLO ROCHETTI,

Professeur au lycée royal Campanella, à Reggio (Calabria).

Transformer le produit

$$3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2[(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3]$$

en une somme de trois cubes. (S. REALIS.)

Le produit précédent peut s'écrire ainsi,

$$\begin{aligned} P = {}&3(\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+2\alpha^3\beta^3+2\alpha^3\gamma^3+2\beta^3\gamma^3)\\ &\times(2\alpha^3+2\beta^3+2\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2),\end{aligned}$$

et, si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$\Sigma\alpha^9=\alpha^9+\beta^9+\gamma^9,$$
$$\Sigma\alpha^8\beta=\alpha^8\beta+\alpha\beta^8+\alpha^8\gamma+\alpha\gamma^8+\beta^8\gamma+\beta\gamma^8,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

il est visible qu'on peut mettre P sous la forme suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} P = {}&6\Sigma\alpha^9+9\Sigma\alpha^8\beta+9\Sigma\alpha^7\beta^2+18\Sigma\alpha^6\beta^3+18\Sigma\alpha^5\beta^4\\ &+9\Sigma\alpha^6\beta^2\gamma+18\Sigma\alpha^5\beta^3\gamma+18\Sigma\alpha^4\beta^3\gamma^2+36\alpha^3\beta^3\gamma^3.\end{aligned}\right.$$

Or, le développement de la somme des trois cubes

$$\begin{aligned}&(2\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3 + 3\alpha\beta^2 + 3\alpha\gamma^2)^3\\ &\quad + (2\beta^3 - \gamma^3 - \alpha^3 + 3\beta\alpha^2 + 3\beta\gamma^2)^3\\ &\quad + (2\gamma^3 - \alpha^3 - \beta^3 + 3\gamma\alpha^2 + 3\gamma\beta^2)^3\end{aligned}$$

donne tous les termes de l'expression (1), et ces termes seulement, parce que les autres disparaissent par la réduction des termes semblables; donc P a été transformé en la somme de trois cubes.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1320

(voir 2e série, t. XVIII, p. 383);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

Maître répetiteur au lycée de Saint-Quentin.

Soit une série de cercles concentriques. Dans chacun d'eux on trace un rayon OM *qui détache un secteur* AOM *d'aire donnée à partir d'une droite fixe* AOX *passant par le centre* O : *trouver le lieu du point* M.

(LAISANT.)

Prenons pour pôle le centre O et pour axe polaire la droite OX; en désignant par m^2 l'aire donnée, et par r et θ les coordonnées du point M, nous aurons

$$\frac{\pi r^2 \theta}{360} = m^2$$

ou, en posant $\dfrac{360 m^2}{\pi} = a^2$,

$$\theta r^2 = a^2. \tag{1}$$

Telle est l'équation de la courbe lieu du point M.

Cette courbe, cas particulier des spirales dont l'équation est $r = a\theta^n$, a été désignée par Cotes sous le nom de *lituus* (*Harmonia mensurarum*).

Note. — Solutions analogues de MM. Moret-Blanc; Leinekugel; J.-B. Buvat, du Lycée de Moulins; Habbé.

Question 1324

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 384);

PAR M. MORET-BLANC.

Si (x, y, z) est une solution en nombres entiers de l'équation

$$aX^4 + bY^4 + dX^2Y^2 = cZ^2,$$

on aura une solution en nombres entiers (x_1, y_1, z_1) de l'équation

$$X^4 + abc^2Y^4 + cdX^2Y^2 = Z^2$$

par les formules

$$x_1 = ax^4 - by^4, \quad y_1 = 2xyz, \quad z_1 = c^2z^4 + (4ab - d^2)x^4y^4.$$

Les formules de Lebesgue sont la consquence évidente des précédentes. (A. DESBOVES.)

L'équation $x_1^4 + abc^2y_1^4 + cdx_1^2y_1^2 = z_1^2$ devient, en remplaçant x_1, y_1, z_1 par les valeurs précédentes,

$$\begin{aligned}(ax^4 - by^4)^4 &+ 16abc^2x^4y^4z^4 + 4cdx^2y^2z^2(ax^4 - by^4)^2 \\ &= [c^2z^4 + (4ab - d^2)x^4y^4]^2,\end{aligned}$$

ou, en ayant égard à la relation $cz^2 = ax^4 + by^4 + dx^2y^2$,

$$\begin{aligned}(ax^4 - by^4)^4 &+ 16abx^4y^4(ax^4 + by^4 + dx^2y^2)^2 \\ &+ 4dx^2y^2(ax^4 - by^4)(ax^4 + by^4 + dx^2y^2) \\ &= [(ax^4 + by^4)^2 + 2dx^2y^2(ax^4 + by^4) + 4abx^4y^4]^2.\end{aligned}$$

Développant et passant tous les termes dans le second membre, il vient

$$\begin{aligned}
&(ax^4 + by^4)^4 + 4dx^2y^2(ax^4 + by^4)^3\\
&\quad - (ax^4 - by^4)^4 - 4dx^2y^2(ax^4 - by^4)^2(ax^4 + by^4)\\
&\quad + 4d^2x^4y^4(ax^4 + by^4)^2 + 8abx^4y^4(ax^4 + by^4)^2\\
&\quad - 4d^2x^4y^4(ax^4 - by^4)^2 - 16abx^4y^4(ax^4 + by^4)^2\\
&\quad + 16abdx^6y^6(ax^4 + by^4) + 16a^2b^2x^8y^8\\
&\qquad\qquad - 32abdx^6y^6(ax^4 + by^4) - 16abd^2x^8y^8 = 0
\end{aligned}$$

ou $0 = 0$, ce qui est une identité. Le théorème est donc démontré ([1]).

On a les formules de Lebesgue (*voir* 2^e série, t. XI, p. 83) en faisant $a = c = 1$.

Question 1326

(voir 2^e série, t. XVIII, p. 432);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver dans l'intérieur d'un triangle ABC *un point tel qu'en abaissant de ce point des perpendiculaires sur les côtés on divise le triangle en trois quadrilatères proportionnels à* m, n, p. (LEZ.)

Soient x et y les coordonnées du point cherché M, rapportées aux côtés AB, AC du triangle pris pour axes; MD, ME, MF les perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés BC, AC, AB.

Le double de l'aire du quadrilatère AEMF sera

$$(x + y\cos A)y\sin A + (y + x\cos A)x\sin A$$
$$= \frac{m}{m+n+p} bc\sin A.$$

([1]) Il ne serait pas sans intérêt de savoir par quelles déductions on est conduit à ce théorème; le calcul qui le vérifie n'indique rien de précis à cet égard.

On aura donc, en divisant par sin A,

$$(x^2+y^2)\cos A + 2xy = \frac{mbc}{m+n+p}.$$

Cette équation représente une hyperbole ayant son centre au point A et pour axe transverse la bissectrice de l'angle A. On a pour les coordonnées des sommets

$$y^2 = x^2 = \frac{1}{4\cos^2\frac{A}{2}} \times \frac{mbc}{m+n+p}$$

et pour longueur du demi-axe transverse

$$2x\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{mbc}{m+n+p}}.$$

L'équation des asymptotes est

$$(x^2+y^2)\cos A + 2xy = 0.$$

Leurs coefficients angulaires sont

$$\frac{-1 \pm \sin A}{\cos A} = -\left(\frac{1 \mp \sin A}{\cos A}\right).$$

Soit CH la hauteur du triangle abaissée du sommet C. Prenons sur CA et sur son prolongement CI = CK = CH; les parallèles menées du point A aux droites IH et KH seront les asymptotes [1].

Connaissant les asymptotes et un sommet, il est facile de construire l'hyperbole, qu'on réduira à la portion de branche comprise dans l'intérieur du triangle.

On voit de même que le point M devra se trouver sur

---

[1] L'hyperbole que l'équation $(x^2+y^2)\cos A + 2xy = \frac{mbc}{m+n+p}$ représente, étant équilatère, a pour asymptotes les bissectrices des deux angles droits formés par les deux axes de la courbe, dont les directions sont connues. (G.)

une seconde hyperbole dont l'équation, rapportée aux axes BA, BC, est

$$(x^2+y^2)\cos B + 2xy = \frac{nac}{m+n+p},$$

et que l'on construira comme la première.

L'intersection des deux hyperboles donnera le point M.

Si elles ne se coupent pas dans l'intérieur du triangle, le problème n'aura pas de solution.

On voit par la disposition des deux hyperboles que le problème, quand il sera possible, n'aura qu'une seule solution.

Note. — La même question a été résolue par M. Ferdinando Pisani.

Question 1327

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 432);

Par M. MORET-BLANC.

On donne les bissectrices α, β *des deux angles aigus* A, B *d'un triangle rectangle* ABC : *calculer les valeurs des côtés et des angles* A, B *du triangle.* (*Discussion et nombre des solutions.*)

Les bissectrices étant supposées intérieures, on a

$$a = \beta \cos\frac{B}{2}, \quad b = \alpha\cos\frac{A}{2},$$

d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\beta\cos\frac{B}{2}}{\alpha\cos\frac{A}{2}},$$

et par suite

$$\alpha \sin A \cos\frac{A}{2} = \beta\cos A\cos\frac{B}{2}.$$

Il en résulte

$$2\alpha \sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \beta\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B}{2},$$

et, parce que

$$\cos\frac{B}{2} = \cos\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right),$$

$$2\alpha \sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\beta\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right),$$

$$2\sqrt{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \cos^3\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} - \sin^3\frac{A}{2}.$$

Divisant les deux membres par $\cos^3\frac{A}{2}$, et posant $\tan\frac{A}{2} = x$, on a l'équation

$$(1) \qquad x^3 + x^2 + \left(2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)x - 1 = 0,$$

qui n'a qu'une seule racine positive comprise entre 0 et 1 [1].

---

[1] Ses deux autres racines sont imaginaires, car, en changeant x en $-x$, l'équation devient

$$x^3 - x^2 + \left(2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)x + 1 = 0$$

ou

$$x^3 - x^2 - x + 1 + 2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta}x = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(x+1)(x-1)^2 + 2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta}x = 0.$$

Or, il est évident que le premier membre de cette dernière équation est constamment positif pour toute valeur positive de x; donc l'équation proposée

$$(1) \qquad x^3 + x^2 + \left(2\sqrt{2}\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)x - 1 = 0$$

n'admet aucune racine négative, et, par conséquent, elle a deux racines imaginaires. (G.)

Cette racine fait connaître l'angle $\frac{A}{2}$ au moyen de sa tangente, et par suite les angles A, B. On obtient les valeurs des côtés a, b par les formules $a = \beta \cos\frac{B}{2}$, $b = \alpha \cos\frac{A}{2}$; puis on a

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad c = \frac{a}{\sin A}.$$

Le problème est toujours possible et n'admet qu'une seule solution.

Si α, β représentaient les valeurs des bissectrices extérieures des angles A, B, on aurait

$$a = \beta \sin\frac{B}{2}, \quad b = \alpha \sin\frac{A}{2},$$

d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Il s'ensuit

$$2\alpha \cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \beta \cos A \sin\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right),$$

$$2\alpha \cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\beta\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right),$$

$$2\sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\beta}\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2} = \cos^3\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} + \sin^3\frac{A}{2}.$$

En divisant par $\cos^3\frac{A}{2}$, et posant $\operatorname{tang}\frac{A}{2} = x$, il vient

$$(2) \qquad x^3 - \left(2\sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)x^2 - x + 1 = 0.$$

Cette équation a deux racines positives, l'une comprise entre 0 et 1, et l'autre plus grande que 1 ; la première seule est admissible ([1]).

Le problème a encore une solution et n'en a qu'une seule.

On verrait de la même manière qu'il en serait encore de même si l'on donnait une bissectrice intérieure et une bissectrice extérieure.

Note. — La question a aussi été résolue par MM. Ferdinando Pisani; A. Leinekugel, étudiant en Mathématiques.

Question 1329

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 477);

PAR M. V.-M. ARNAUD,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

Soit la série récurrente

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots,$$

telle que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$: *trouver la somme des n premiers termes de la série*

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.5} + \frac{5}{3.8} + \ldots + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}\,u_{n+3}}.$$

(E. LUCAS.)

De l'égalité

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

on tire

$$u_{n+1} = u_{n+2} - u_n,$$

([1]) La racine négative de cette équation, changée de signe, est la valeur de $\tang\frac{A}{2}$, lorsque α représente la bissectrice extérieure de l'angle A et β la bissectrice intérieure de l'angle B. (G.)

et la série peut s'écrire

$$(1)\quad \frac{2-1}{1.2}+\frac{3-1}{1.3}+\frac{5-2}{2.5}+\frac{8-3}{3.8}+\ldots+\frac{u_{n+3}-u_{n+1}}{u_{n+1}u_{n+3}}$$

ou

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\ldots \\ \quad +\left(\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n+3}}\right). \end{cases}$$

Or, d'après la forme des dénominateurs, on voit que le premier terme de chaque parenthèse est détruit par le second terme de la parenthèse antéprécédente. Dans la série (2), les seuls termes qui ne se détruisent pas sont donc les premiers des deux premières parenthèses et les derniers des deux dernières.

On a donc

$$S_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{u_{n+2}}-\frac{1}{u_{n+3}}$$
$$= 2-\left(\frac{1}{u_{n+2}}+\frac{1}{u_{n+3}}\right) = 2-\frac{u_{n+4}}{u_{n+2}u_{n+3}}.$$

Note. — La même question a été resolue par MM. A. Wokram, à Saint-Pétersbourg; J. de Virieu, professeur à Lyon; H.-J. Krantz; Moret-Blanc; Artemieff, à Saint-Pétersbourg; E. Fauquembergue; A. Leinekugel; Lebreton; H. Letellier, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée de Tarbes (classe de M. Escary).

Question 1332

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 478);

Par M. ROBAGLIA.

Une droite SA *pivote autour du sommet* S *d'une parabole qu'elle rencontre en* A, *et de ce point* A *on abaisse une perpendiculaire* AP *sur la tangente au sommet :*

1° *On joint le point* P *au pied* D *de la directrice par une droite qui rencontre* AS *en* M ;

2° *On joint le point* P *au foyer* F *par une droite qui rencontre* AS *en* N ;

3° *On abaisse de* P *sur* AS *une perpendiculaire qui coupe* AS *au point* Q, *et l'on prolonge* PQ *d'une quantité égale* QR.

Démontrer que le point M *décrit une hyperbole, le point* N *une ellipse, le point* Q *un cercle, et le point* R *une strophoïde* ([1]).

(Ed. Guillet.)

1. Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole et $y = mx$ l'équation de la droite SA. On a, pour l'ordonnée du point A,

$$y = SP = \frac{2p}{m},$$

et, par suite, pour les coefficients angulaires m', m'' des droites PD, PF,

$$m' = \frac{4}{m}, \quad m'' = -\frac{4}{m},$$

d'où

$$mm' = 4, \quad mm'' = -4.$$

Il s'ensuit que le lieu du point M est une hyperbole ayant ses sommets aux points D, S, et que le lieu du point N est une ellipse dont le petit axe est SF et le grand axe 2SF ([2]).

2. Soit T le point de rencontre des droites PQ, SF;

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

([2]) L'équation du lieu du point M est

$$y^2 - 4x^2 - 2px = 0,$$

et le lieu du point N est représenté par l'équation

$$y^2 + 4x^2 - 2px = 0.$$

(*Note du Rédacteur.*)

les triangles rectangles semblables PST, PSA donnent

$$\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{SP}} = \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{AP}}, \quad \mathrm{ST} = \frac{\mathrm{SP}^2}{\mathrm{AP}} = 4\mathrm{SF}.$$

Il en résulte que le lieu du point Q est le cercle décrit sur $\mathrm{ST} = 4\mathrm{SF}$ comme diamètre.

3. En nommant C le point de rencontre de la droite SR et de la perpendiculaire à ST en T, il est facile de voir, à cause de $\mathrm{SR} = \mathrm{SP}$, que $\mathrm{CR} = \mathrm{CT}$. Donc le lieu géométrique du point R est une strophoïde, ayant son point de rebroussement en T et son sommet en S.

Note. — Autres solutions de MM. Lez; Moret-Blanc; Édouard Lery, agent voyer cantonal; Droz; Ferdinando Pisani; E. Fauquembergue; A. Leinekugel, étudiant en Mathématiques; Samson Dreyfus, étudiant à la Faculté des Sciences de Nancy; Paul Payssé, élève en Mathématiques speciales au Lycée de Bordeaux; Ambert, du Lycée de Montpellier; Georges Galiesto, à Bordeaux; Basset, à Moulins; Lambiotte, élève de l'École polytechnique de Bruxelles; Lebreton; L. Julliard, du Lycée Corneille (Rouen).

Question 1334

(voir 2e série, t. XVIII, p. 479);

Par M. A. DROZ,

Maître de Mathématiques à l'Institution Briedenstein, à Granges.

Un quadrilatère est circonscrit à un cercle dont le rayon est r et ses sommets sont sur un autre cercle dont le rayon est R; *si* D *représente la distance des centres des cercles, démontrer que le rectangle des diagonales du quadrilatère est égal à* $\dfrac{8\mathrm{R}^2 r^2}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2}$.

(G. Leudesdorf, M. A.)

Menons les bissectrices BE, DF des deux angles opposés ABC, ADC du quadrilatère ABCD ([1]); ces droites

---

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

se coupent au centre O du cercle inscrit, et elles rencontrent la circonférence circonscrite en des points E, F, extrémités d'un diamètre EF de cette circonférence.

Soient G et H les points auxquels le cercle inscrit O est tangent aux côtés BC, CD du quadrilatère.

Les triangles rectangles OBG, ODH donnent

$$\sin\frac{1}{2}\text{ABC} = \frac{\text{OG}}{\text{OB}} = \frac{r}{\text{OB}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{1}{2}\text{ADC} = \frac{\text{OH}}{\text{OD}} = \frac{r}{\text{OD}},$$

d'où

$$\begin{aligned} &2\sin\frac{1}{2}\text{ABC}\sin\frac{1}{2}\text{ADC} \\ &\qquad = 2\sin\frac{1}{2}\text{ABC}\cos\frac{1}{2}\text{ABC} = \frac{2r^2}{\text{OB}.\text{OD}}; \end{aligned}$$

donc

$$\sin\text{ABC} = \frac{2r^2}{\text{OB}.\text{OD}}.$$

Mais, dans le triangle ABC, on a

$$\text{AC} = 2\text{R}\sin\text{ABC};$$

par conséquent, la diagonale $\text{AC} = \dfrac{4\text{R}r^2}{\text{OB}.\text{OD}}$.

Dans le triangle DFB, on a

$$\text{BD} = 2\text{R}.\sin\text{DFB} = 2\text{R}.\sin\text{OFB};$$

mais l'angle $\text{OBF} = \text{EBF}$ est droit; puisque EF est un diamètre du cercle R, le triangle OBF étant rectangle en B,

$$\sin\text{OFB} = \frac{\text{OB}}{\text{OF}};$$

donc

$$\text{BD} = 2\text{R}\frac{\text{OB}}{\text{OF}}.$$

Ainsi le produit des deux diagonales $\text{AC} \times \text{BD} = \dfrac{8\text{R}^2r^2}{\text{OD}.\text{OF}}$.

Or, le produit OD.OF représente la puissance du point O par rapport au cercle dont le rayon est R; on a donc

$$OD.OF = R^2 - D^2;$$

il s'ensuit

$$AC.BD = \frac{8R^2r^2}{R^2 - D^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Lez, Ferdinando Pisani.

Question 1339

(voir 2e serie, t. XVIII, p. 528),

PAR M. J. LISSENÇON,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Trouver un nombre qui soit, ainsi que son bicarré, la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

(LIONNET.)

Un nombre N égal à la somme de deux carrés peut être représenté par $a^2 + b^2$, et, en introduisant les imaginaires,

$$N = a^2 + b^2 = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1});$$

son bicarré

$$N^4 = (a^2 + b^2)^4 = (a + b\sqrt{-1})^4(a - b\sqrt{-1})^4,$$

et

$$N^4 = A^2 + B^2,$$

en posant

$$(a + b\sqrt{-1})^4 = A + B\sqrt{-1},$$
$$(a - b\sqrt{-1})^4 = A - B\sqrt{-1}.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$(1) \qquad A = a^4 - 6a^2b^2 + b^4,$$
$$(2) \qquad B = 4a^3b - 4ab^3.$$

D'après les conditions du problème, a et b doivent être deux nombres entiers consécutifs, ce qui permet de remplacer b par $a+1$, dans les relations (1) et (2), qui deviennent, par cette substitution,

$$(3)\qquad A = -4a^4 - 8a^3 + 4a + 1,$$

$$(4)\qquad B = -8a^3 - 12a^2 - 4a.$$

Pour que A, B soient, comme a, b, deux nombres entiers consécutifs, il suffit qu'on ait $A - B = 1$.

Si, dans l'égalité $A - B = 1$, on remplace A et B par les valeurs (3) et (4), il vient

$$4a^4 - 12a^2 - 8a = 0,$$

équation dont les racines sont $a = 0$, $a = 2$, $a = -1$.

La valeur $a = 2$ convient seule à la question.

Il en résulte

$$b = 3,\quad A = -119,\quad B = -120,$$

$$a^2 = 4,\quad b^2 = 9,\quad N = a^2 + b^2 = 13,$$

$$N^4 = A^2 + B^2 = 119^2 + 120^2 = 28561 = 13^4.$$

Le nombre 13 satisfait donc à la question proposée.

Note. — Autres solutions de MM. Moret-Blanc et Leinekugel.

Question 1340

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 528)

Par M. J.-M. FAURÉ,

Élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Tarbes.

Si a, b, c sont les côtés rangés par ordre de grandeurs décroissantes d'un triangle ABC, *et* S *la surface de ce triangle :*

1° *L'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des trois bissectrices intérieures a pour expression*

$$\frac{2abcS}{(b+c)(a+c)(a+b)};$$

2° *L'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des deux bissectrices extérieures issues des sommets* B, C, *et de la bissectrice intérieure issue du sommet* A, *a pour expression*

$$\frac{2abcS}{(b+c)(a-c)(a-b)}.$$

(DOSTOR.)

1° Soient AA', BB', CC' les bissectrices intérieures et S' l'aire du triangle A'B'C' [1]. On a

$$(1)\qquad S' = S - CA'B' - BA'C' - AB'C'.$$

Les propriétés connues des bissectrices donnent

$$AB' = \frac{bc}{a+c},\quad AC' = \frac{bc}{a+b},\quad BA' = \frac{ac}{b+c},$$

$$CA' = \frac{ab}{b+c},\quad CB' = \frac{ab}{a+c},\quad BC' = \frac{ac}{a+b}.$$

D'autre part, les triangles CA'B', CAB, ayant un angle commun C, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle, d'où

$$CA'B' = \frac{abS}{(a+c)(b+c)}.$$

On a de même

$$BA'C' = \frac{acS}{(a+b)(c+b)},\quad AB'C' = \frac{bcS}{(a+b)(a+c)}.$$

En remplaçant les aires CA'B', BA'C', AB'C' par leurs valeurs dans l'égalité (1), on trouve, toute réduction effectuée,

$$S' = \frac{2abcS}{(b+c)(a+c)(a+b)}.$$

2° Soient BB_1, CC_1 les bissectrices extérieures des

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

angles B, C, et S″ l'aire du triangle $A'B_1C_1$. On a

$$S'' = AB_1C_1 + BA'C_1 + CA'B_1 - S, \tag{2}$$

et, d'après les propriétés des bissectrices extérieures,

$$AB_1 = \frac{bc}{a-c}, \quad AC_1 = \frac{bc}{a-b}, \quad CB_1 = \frac{ab}{a-c}, \quad BC_1 = \frac{ac}{a-b}.$$

Il s'ensuit, en ayant égard aux rapports des triangles qui ont un angle égal,

$$AB_1C_1 = \frac{bcS}{(a-b)(a-c)}, \quad BA'C_1 = \frac{acS}{(a-b)(b+c)},$$

$$CA'B_1 = \frac{abS}{(a-c)(b+c)}.$$

En remplaçant AB_1C_1, $BA'C_1$, $CA'B_1$ par leurs valeurs dans l'égalité (2), on a, toute réduction effectuée,

$$S'' = \frac{2abcS}{(a-b)(a-c)(b+c)}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Droz ; Lez; Marcello Rocchetti ; Leinekugel ; F. P., professeur de Mathématiques ; Ferdinando Pisani ; Basset ; H. Lemelle, à Saint-Junien ; E. Pecqueu, élève au Lycée du Havre ; E. Chrétien, élève au Lycée du Havre.

Question 1341

(voir 2e série, t. XIX, p. 144);

PAR M. ED. BRESSON,

Élève en Mathématiques spéciales au Prytanée militaire, à la Flèche.

D'un point donné M *on abaisse les normales à une conique; soient a_i, a_j deux quelconques des pieds de ces normales, α_{ij} le pied de la perpendiculaire abaissée du point* M *sur la corde $a_i a_j$, et β_{ij} le conjugué harmonique du point α_{ij} relativement aux points a_i, a_j.*

Il y a six points β_{ij} : démontrer qu'ils sont les sommets d'un quadrilatère complet.

Quelle est la propriété analogue relativement à une surface du second ordre? (LAGUERRE.)

I. Pour plus de netteté, je démontrerai à part le lemme suivant :

Lorsque, dans le plan d'un triangle ABC, *on a un point* P *tel que les droites joignant les sommets* A, B, C *du triangle aux projections* D, E, F *du point* P *sur les côtés* BC, CA, AB *se coupent en un même point, le point* P *jouit de la même propriété par rapport au triangle* DEF.

C'est-à-dire qu'en désignant par H, I, G les projections de P sur les côtés EF, FD, DE du triangle DEF, les droites DH, EI, FG se couperont en un même point (¹).

Pour le démontrer, il faut établir l'égalité

$$(1) \qquad \frac{GD}{GE}\times\frac{HE}{HF}\times\frac{IF}{ID}=-1.$$

Or, en vertu de notre hypothèse, nous avons d'abord la relation

$$(2) \qquad \frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=-1.$$

Le quadrilatère PDEC étant inscriptible, l'angle PDG = PCE; donc les triangles rectangles PDG, PEC sont semblables, et leur similitude donne

$$\frac{GD}{GP}=\frac{EC}{PE}.$$

De même, les triangles rectangles PGE, PDC étant semblables, on a

$$\frac{GE}{GP}=\frac{DC}{PD},$$

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où, en divisant membre à membre,

$$(3) \qquad \frac{GD}{GE} = \frac{EC \times PD}{DC \times PE}.$$

On aura de même ces deux autres relations analogues

$$(4) \qquad \frac{HE}{HF} = \frac{FA \times PE}{EA \times PF},$$

$$(5) \qquad \frac{IF}{ID} = \frac{DB \times PF}{FB \times PD}.$$

Multipliant membre à membre les relations (3), (4), (5), il vient

$$\frac{GD}{GE} \times \frac{HE}{HF} \times \frac{IF}{ID} = \frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB}$$

ou, à cause de la relation (2),

$$\frac{GD}{GE} \times \frac{HE}{HF} \times \frac{IF}{ID} = -1,$$

égalité qui démontre le lemme énoncé.

Le corollaire suivant s'en déduit immédiatement, d'après une proposition connue de la théorie des transversales :

Corollaire. — Les conjugués harmoniques des points G, H, I, pris respectivement par rapport à (D, E), (E, F), (F, D), sont en ligne droite.

Cela posé, il sera facile d'établir la proposition 1341.

Car, en considérant les points D, E, F comme les pieds de trois normales menées du point P à une conique, les côtés BC, AC, AB du triangle ABC seront des tangentes à la conique en D, E, F, et l'on sait que les droites AD, BE, CF se couperont en un même point. Donc, en vertu de notre lemme, ou plutôt de son corollaire, les conjugués harmoniques de G, H, I relativement à (D, E), (E, F), (F, D) sont en ligne droite.

On a ainsi quatre droites qui contiennent chacune trois des six points β_{ij}; par conséquent, les six points β_{ij} forment les sommets d'un quadrilatère complet.

II. *Quelle est la propriété analogue relativement à une surface du second ordre?*

Voici comment on pourrait l'énoncer :

Par un point donné P *on mène les six normales à une surface du second ordre; soient* D, E *les pieds de deux de ces normales,* G *le point de rencontre de la droite* DE *et du plan perpendiculaire à cette droite mené par le point* P, K *le conjugué harmonique de* G *par rapport aux points* D, E : *les quinze points* K *ainsi déterminés sont trois à trois en ligne droite.*

En effet, par les pieds D, E, F de trois de ces normales faisons passer un plan qui coupe la surface suivant une conique. Soit p la projection de P sur ce plan; les droites pD, pE, pF seront normales à la conique DEF, car la droite PD de l'espace, perpendiculaire au plan tangent en D à la surface, est perpendiculaire à la tangente DT menée à la conique au point D; donc, d'après le théorème des trois perpendiculaires, la droite pD est perpendiculaire à la tangente DT: c'est dire qu'elle est normale à la conique. Il en est évidemment de même des droites pE, pF. De là résulte que les trois points K correspondant aux trois normales PD, PE, PF sont en ligne droite. Par conséquent, les quinze points K sont trois à trois en ligne droite.

Par chacun de ces points K passent quatre droites du système [1].

[1] Le nombre de ces droites est de vingt; chacune d elles contient trois des quinze points K : donc, par l'un quelconque de ces points passent nécessairement quatre droites du système.

Note. — La même question a été resolue par MM. Ferdinando Pisani et Dufaur, élève en Mathématiques spéciales, à Bordeaux.

Question 1342

(voir 2e série, t. XIX, p. 144);

PAR M. DUFAUR,

Élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Bordeaux.

D'un point donné M *on mène deux droites normales à une parabole; soient a, b leurs pieds, α le pied de la perpendiculaire abaissée du point* M *sur la corde ab, et β le conjugué harmonique de α relativement aux points a et b : démontrer que le point β est sur la droite menée par* M, *perpendiculairement à l'axe de la parabole.* (LAGUERRE.)

Menons aux points a, b des perpendiculaires aP, bP aux normales Ma, Mb; les droites aP, bP seront tangentes à la parabole, et, en joignant leur point de rencontre P au milieu i de la corde des contacts ab, la droite Pi sera parallèle à l'axe de la parabole.

Si par le point P on mène une parallèle PN à la corde ab, les quatre droites Pa, Pb, Pi, PN formeront un faisceau harmonique, puisque le point i est le milieu de ab.

Les trois rayons Pa, Pb, PN de ce faisceau sont respectivement perpendiculaires aux trois rayons Ma, Mb, Mα du faisceau harmonique M(a, b, α, β); donc les quatrièmes rayons Pi, Mβ des deux faisceaux sont perpendiculaires entre eux. Par conséquent, le point β est sur la droite menée par M perpendiculairement à l'axe de la parabole.

Note. — La même proposition a été démontrée par MM. Ferdinando Pisani; A. Tissier, elève en Mathématiques spéciales au Lycée de Rouen, Ed. Bresson, élève en Mathématiques spéciales au Prytanée militaire, à la Flèche.