NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Recherches sur deux modes de transformation des figures solides

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 433-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__433_0>

RECHERCHES SUR DEUX MODES DE TRANSFORMATION DES FIGURES SOLIDES;

PAR M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

[SUITE (1).]

13. Nous avons vu qu'en général une surface V de classe m, dans la figure ABCD, se transforme, dans la figure $A'B'C'D'$, en une surface V' de classe $3m$, tangente $2m$ fois aux faces du tétraèdre $A'B'C'D'$.

Demandons-nous quelle est la nature de ce contact. Du point A on peut mener une infinité de plans tangents à la surface V : donc le plan $B'C'D'$ représente une infinité de plans tangents à la surface V'. Donc cette surface V' touche les faces du tétraèdre $A'B'C'D'$ le long d'une courbe.

Pour avoir l'une de ces courbes, il faut chercher l'intersection de la face représentée par l'équation

$$T' = 0,$$

avec la surface dont l'équation tangentielle est

$$f\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = 0.$$

Soit M un point de cette courbe, que nous appellerons U'. Le plan polaire du point M par rapport à la quadrique représentée par l'équation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + T'^2 = 0$$

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 548.

passe par le point D′, puisque le point M est dans le plan A′B′C′. Mais, comme le point M est également sur la surface V′, ce plan polaire est aussi tangent à la surface V'_1, polaire réciproque de la surface V′, par rapport à cette quadrique directrice, surface V'_1 dont l'équation est

$$(18) \qquad f\left(\frac{1}{\lambda X'}, \frac{1}{\mu Y'}, \frac{1}{\nu Z_1}, \frac{1}{\rho T'}\right) = 0;$$

alors le plan polaire du point M est tangent au cône ayant D′ pour sommet et circonscrit à la surface V'_1.

Donc, la polaire du point M, par rapport à la conique représentée par l'équation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0,$$

est tangente à la base de ce cône sur le plan A′B′C′.

Ainsi la courbe U′, lieu du point M, est la polaire réciproque, par rapport à la conique représentée par l'équation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0,$$

de la base U'_1 d'un cône bien connu.

L'étude de la courbe U′ revient donc à celle de la courbe U'_1, ou encore à l'étude du cône dont cette dernière courbe est la base.

L'équation (18) se met sous la forme

$$(19) \qquad \varphi(X', Y', Z', T') = 0.$$

Cette équation (19) représente la surface V'_1. Elle est homogène et de degré $3m$, et chaque variable y entre au plus au degré m.

Pour avoir l'équation du cône ci-dessus, il n'y a qu'à éliminer T′ entre l'équation (19) et l'équation suivante :

$$(20) \qquad \varphi'_{T'}(X', X', Z', T') = 0.$$

L'équation (19) peut s'écrire

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_{3m}(X', Y', Z') + T'\varphi_{3m-1}(X', Y', Z') + \ldots \\ &\qquad + T'^m \varphi_{2m}(X', Y', Z') = 0, \end{aligned} \right.$$

et par suite l'équation (20) est

$$(22)\quad \varphi_{3m-1}(X', Y', Z') + \ldots + mT'^{m-1}\varphi_{2m}(X', Y', Z') = 0.$$

L'équation résultante est de degré m par rapport aux coefficients de l'équation (22), et de degré $(m-1)$ par rapport à ceux de l'équation (21). Elle est donc, par rapport aux variables, de degré

$$m(3m-1) + (m-1)3m = 6m^2 - 4m = 2m(3m-2).$$

Tel est l'ordre du cône. Voyons les particularités qu'il offre.

Tout coefficient des équations (21) et (22) est au moins de degré m par rapport à l'ensemble des variables X' et Y'. Donc, tout terme de la résultante est, par rapport à l'ensemble de ces mêmes variables, d'un degré au moins égal à

$$(m + \overline{m-1})m = (2m-1)m.$$

Si donc, dans l'équation du cône, on fait

$$X' = hY',$$

Y' est facteur $(2m-1)m$ fois, ce qui prouve que le cône contient chacune des arêtes du tétraèdre qui passent en D' un nombre de fois égal à $(2m-1)m$.

La conclusion de l'étude que nous venons de faire est que la courbe U'_1 est d'ordre $2m(3m-2)$, et que cette courbe a les points A', B', C' pour points multiples d'ordre $(2m-1)m$.

Passant enfin à la courbe U', on voit qu'elle est de classe $2m(3m-2)$ et qu'elle a les trois côtés du triangle $A'B'C'$ pour tangentes multiples d'ordre $(2m-1)m$.

14. L'équation d'un point dans les figures ABCD est

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S = 0. \tag{23}$$

A ce point correspond, dans la figure A'B'C'D', une surface de troisième classe dont l'équation tangentielle est

$$\frac{\alpha}{\lambda P'} + \frac{\beta}{\mu Q'} + \frac{\gamma}{\nu R'} + \frac{\delta}{\rho S'} = 0. \tag{24}$$

D'après nos théories générales, cette surface a pour plans tangents doubles les faces du tétraèdre A'B'C'D'. Chacune de ces faces touche la surface le long d'une courbe de deuxième classe (conique), et cette courbe est inscrite au triangle qui constitue cette face.

De l'équation tangentielle (24) passons à l'équation en coordonnées tétraédriques, équation qui est

$$\sqrt{\frac{\alpha X'}{\lambda}} + \sqrt{\frac{\beta Y'}{\mu}} + \sqrt{\frac{\gamma Z'}{\nu}} + \sqrt{\frac{\delta T'}{\rho}} = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît une surface du quatrième ordre, qui porte le nom de *quartique de Steiner*.

Cette surface a été étudiée par Kummer, Weierstrass, Schröter, Cremona. Nous la considérerons ici comme la transformée d'un point.

15. Théorème V. — *Si deux surfaces se touchent en un point, il en est de même des transformées.*

Soient deux surfaces définies par les équations tangentielles

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} f(P, Q, R, S) = 0, \\ \varphi(P, Q, R, S) = 0. \end{cases}$$

Ces surfaces seront tangentes en un point, si le système formé par les équations (A) et les équations suivantes :

$$(B) \qquad \frac{f'_P}{\varphi'_P} = \frac{f'_Q}{\varphi'_Q} = \frac{f'_R}{\varphi'_R} = \frac{f'_S}{\varphi'_S}$$

admet une solution.

Les surfaces transformées sont définies par les équations tangentielles

$$(A') \qquad \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\lambda P'}, \dfrac{1}{\mu Q'}, \dfrac{1}{\nu R'}, \dfrac{1}{\rho S'}\right) = 0, \\ \varphi\left(\dfrac{1}{\lambda P'}, \dfrac{1}{\mu Q'}, \dfrac{1}{\nu R'}, \dfrac{1}{\rho S'}\right) = 0. \end{cases}$$

Elles seront tangentes en un point si le système formé par les équations (A') et par les équations suivantes,

$$(B') \qquad \frac{f'_{P'}}{\varphi'_{P'}} = \frac{f'_{Q'}}{\varphi'_{Q'}} = \frac{f'_{R'}}{\varphi'_{R'}} = \frac{f'_{S'}}{\varphi'_{S'}},$$

admet une solution.

Tout revient donc à prouver que, si le système (A), (B) admet une solution, le système (A'), (B') en admet une aussi, ce qui devient évident si l'on observe que

$$f'_P\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}, \frac{1}{\rho S'}\right) = -\frac{1}{\lambda P'^2} f'_P(P, Q, R, S),$$

et par suite que

$$\frac{f'_{P'}}{\varphi'_{P'}} = \frac{f'_P}{\varphi'_P}.$$

Corollaire. — Si le système (A), (B) admet une infinité de solutions, il en est de même du système (A'), (B'). En d'autres termes, si deux surfaces se touchent le long d'une courbe, il en est de même des surfaces transformées.

Remarque. — On sait qu'il y a deux espèces d'enveloppes : 1° celles qui touchent chaque enveloppée en un point seulement; 2° celles qui touchent chaque enveloppée le long d'une courbe, appelée par Monge la *caractéristique de l'enveloppe*.

On a alors les deux théorèmes suivants :

1° *La transformée d'une enveloppe de première espèce est enveloppe de première espèce des surfaces transformées. En particulier, si un point décrit une surface, la quartique de Steiner qui correspond à ce point a pour enveloppe de première espèce la transformée de cette surface.*

2° *La transformée d'une enveloppe de deuxième espèce est enveloppe de deuxième espèce des surfaces transformées.*

16. Avant d'aller plus loin, il est bon d'interpréter géométriquement les relations (12)

$$\lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR' = \rho SS'.$$

THÉORÈME VI. — *Si l'on établit une correspondance de plan à plan par les relations* (12) *et si l'on désigne par* M *et* M′ *les points où deux plans correspondants quelconques rencontrent deux arêtes de même nom* AB *et* A′B′, *le produit*

$$\frac{MB}{MA} \times \frac{M'B'}{M'A'}$$

est constant quels que soient les deux plans correspondants que l'on considère.

Cherchons, en effet, le point M où le plan ayant pour équation

$$PX + QY + RZ + ST = 0$$

coupe l'arête AB; et pour cela, dans l'équation de ce plan, supposons

$$Z = 0 \quad \text{et} \quad T = 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{X}{Y} = -\frac{Q}{P};$$

d'où, en désignant les aires des faces par A, B, C, D,

$$\frac{AX}{BY} = -\frac{Q}{P} \times \frac{A}{B},$$

AX et BY représentent, au signe près, les triples volumes des tétraèdres BMCD et AMCD, de sorte que leur rapport est $\pm \frac{BM}{AM}$, suivant que le point M se trouve sur l'arête AB elle-même, ou sur son prolongement. Si donc on convient de donner un signe implicite à ce rapport, en le regardant comme positif quand le point M est sur l'arête même et comme négatif quand le point M est sur un prolongement, on a dans tous les cas

$$\frac{BM}{AM} = -\frac{Q}{P} \times \frac{A}{B}.$$

On a par analogie, en faisant la même convention :

$$\frac{B'M'}{A'M'} = -\frac{Q'}{P'} \times \frac{A'}{B'};$$

multipliant membre à membre, on obtient

$$(25) \qquad \frac{BM}{AM} \times \frac{B'M'}{A'M'} = \frac{QQ'}{PP'} \times \frac{AA'}{BB'},$$

relation *absolument générale.*

Si maintenant nous faisons correspondre les plans entre eux par les relations (12), la relation (25) s'écrit

$$(26) \qquad \frac{BM}{AM} \times \frac{B'M'}{A'M'} = \frac{\lambda AA'}{\mu BB'},$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème VII. — *Réciproquement, si les produits tels que*

$$\frac{BM}{AM} \times \frac{B'M'}{A'M'}$$

restent les mêmes quand on fait varier les plans correspondants, ces plans satisfont aux conditions (12).

On a, par hypothèse,

$$\frac{BM}{AM} \times \frac{B'M'}{A'M'} = K,$$

K étant une constante. Comparons cette hypothèse à la relation (25), qui est toujours vraie; on obtient

$$K = \frac{QQ'}{PP'} \times \frac{AA'}{BB},$$

ou bien

$$QQ' = K \frac{BB'}{AA'} PP';$$

on a de même

$$RR' = K_1 \frac{CC'}{AA'} PP',$$

$$SS' = K_2 \frac{DD'}{AA'} PP'.$$

Posant alors

$$K \frac{BB'}{AA'} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad K_1 \frac{CC'}{AA'} = \frac{\lambda}{\nu}, \quad K_2 \frac{DD'}{AA'} = \frac{\lambda}{\rho},$$

on obtient

$$\lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR' = \rho SS'.$$

17. Théorème VIII. — *Dans une transformation définie par les relations* (12), *pour que les plans de l'infini se correspondent, il faut et il suffit que les valeurs de* λ, μ, ν, ρ *soient définies par les équations*

$$\lambda AA' = \mu BB' = \nu CC' = \rho DD'.$$

En effet, le plan de l'infini dans le système ABCD a pour équation

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

A, B, C, D étant les aires des faces.

Le plan qui lui correspond dans l'autre système a donc pour équation

$$\frac{X'}{\lambda A} + \frac{Y'}{\mu B} + \frac{Z'}{\nu C} + \frac{T'}{\rho D} = 0.$$

Il faut identifier ce dernier avec le plan qui a pour équation

$$A'X' + B'Y' + C'Z' + D'T' = 0,$$

ce qui donne bien les relations

$$(27) \qquad \lambda AA' = \mu BB' = \nu CC' = \rho DD'.$$

Ce sont là les conditions nécessaires et suffisantes pour que les plans de l'infini se correspondent.

Théorème IX. — *Dans tout système de transformation établissant une correspondance de plan à plan, si les plans de l'infini se correspondent, les arêtes de même nom de deux tétraèdres sont coupées par les plans correspondants dans des rapports réciproques.*

Si l'on voulait se borner aux transformations définies par les relations (12), la démonstration serait très simple : il n'y aurait qu'à considérer la formule (26) et les analogues et à y tenir compte de l'hypothèse, savoir

$$\lambda AA' = \mu BB' = \nu CC' = \rho DD'.$$

Mais il y a grand intérêt, en vue des applications géométriques, à établir le théorème actuel d'une façon générale.

Remarquons que, dans les faces de même nom qui forment les trièdres A et A′, on a des transformations où une droite correspond à une droite et où les droites de l'infini se correspondent.

Donc les traces d'un plan quelconque sur les faces du trièdre A et les traces du plan correspondant sur les faces du trièdre A′ coupent les arêtes de même nom issues du point A et du point A′ dans des rapports réciproques.

On raisonnerait de même pour les sommets B et B′ (¹).

(*A suivre.*)