ÉDOUARD LUCAS

Sur trois coniques confocales deux à deux

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 401-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__401_1>

SUR TROIS CONIQUES CONFOCALES DEUX A DEUX;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Si trois coniques sont deux à deux bitangentes à un même cercle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point.

C'est la généralisation d'un curieux théorème énoncé, pour le cas de trois coniques confocales deux à deux, par M. Émile Lemoine (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 143; t. XIII, p. 487). Désignons par x, y, z les puissances d'un point quelconque du plan par rapport aux trois cercles; les équations des trois coniques bitangentes à deux des trois cercles sont

$$\sqrt{y} + \sqrt{z} = 2a, \quad \sqrt{z} + \sqrt{x} = 2b, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2c,$$

a, b, c ayant des signes quelconques. Les deux dernières équations s'écrivent

$$(x - z + 4b^2)^2 = 16b^2x \quad \text{et} \quad (x - y + 4c^2)^2 = 16c^2x;$$

divisons membre à membre et extrayons la racine carrée : nous obtenons, pour l'une des cordes d'intersection des deux coniques, l'équation

$$c(x - z + 4b^2) = b(x - y + 4c^2).$$

Par permutation circulaire, on obtient les équations des autres sécantes communes. Celles-ci sont vérifiées par les coordonnées du point qui se trouve à l'intersection de trois parallèles aux axes radicaux des trois cercles pris deux à deux, déterminées par

$$\begin{aligned} x - y &= 4c(b - a), \\ y - z &= 4a(c - b), \\ z - x &= 4b(a - c). \end{aligned}$$

La symétrie de ces formules démontre le théorème en question.

En éliminant le terme tout connu entre deux des équations des cordes, on obtient

$$ax(b - c) + by(c - a) + cz(a - b) = 0;$$

c'est l'équation de la droite qui joint le centre radical des trois cercles au point de concours des sécantes communes. Si l'on change le signe de a, de b ou de c, on obtient les trois autres points de concours.

Remarque. — En général, toute transformation analytique donne lieu à des théorèmes différents lorsque l'on remplace les éléments choisis pour système de coordonnées par d'autres. Ainsi, dans le cas présent, si x, y, z désignent les distances d'un point aux trois côtés d'un triangle, les transformations analytiques précédentes démontrent ce théorème :

Si trois paraboles sont tangentes à deux des trois côtés d'un triangle et ont respectivement pour axes trois droites concourantes partant des sommets du triangle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point.