Nouvelles annales de mathématiques

Édouard Lucas

Sur un théorème de M. Chasles concernant les coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 397-401

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__397_1>

SUR UN THÉORÈME DE M. CHASLES CONCERNANT LES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Parmi les nombreux et intéressants théorèmes donnés par M. Chasles sur les coniques homofocales (*Comptes* *rendus des séances de l'Académie des Sciences*, année 1844) et dont la connaissance permet de faciliter l'étude de la théorie des transcendantes elliptiques, nous rappellerons le suivant :

Si, par deux points fixes d'une conique, on fait passer un cercle variable, le lieu du point de concours des tangentes communes est une conique homofocale à la proposée; de plus, le lieu reste le même lorsque la droite qui joint les deux points fixes se déplace parallèlement à elle-même.

Considérons une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et un point P de paramètre angulaire φ; un point quelconque Q de la normale en P à l'ellipse a pour coordonnées

$$x = (a + \lambda b)\cos\varphi, \quad y = (b + \lambda a)\sin\varphi;$$

si l'on suppose $PQ = r$, on trouve

$$r^2 = (x - a\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2,$$

ou bien, en désignant par b' la longueur du demi-diamètre conjugué de celui qui passe en P,

$$r = \lambda b';$$

on prendra d'ailleurs λ avec le signe + ou avec le signe — suivant que le point Q se trouvera sur la partie extérieure ou intérieure de la normale en P.

Si l'on suppose que le point P se déplace sur l'ellipse, λ restant constant, le point Q décrit une ellipse concentrique, d'axes $a + \lambda b$ et $b + \lambda a$; on retrouve ainsi un théorème de M. Transon. Dans le cas particulier où $\lambda = \pm 1$, les ellipses deviennent les cercles concentriques de rayons $a \pm b$; ce résultat revient, au fond, à la construction bien connue de M. Chasles pour trouver les grandeurs des axes d'une ellipse définie par un système de deux diamètres conjugués.

Décrivons, du point Q comme centre, un cercle de rayon $r = \lambda b'$, tangent à l'ellipse au point P; on trouve aisément, pour les coordonnées du point R de concours des tangentes communes à l'ellipse et au cercle,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} (1-\lambda^2)x &= (a + 2\lambda b + \lambda^2 a)\cos\varphi,\\ (1-\lambda^2)y &= (b + 2\lambda a + \lambda^2 b)\sin\varphi,\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} &= (a+b)\frac{b'+r}{b'-r},\\ \frac{x}{\cos\varphi} - \frac{y}{\sin\varphi} &= (a-b)\frac{b'-r}{b'+r}.\end{aligned}\right.$$

En multipliant membre à membre les équations (2), on obtient le lieu du point R lorsque l'on fait varier r; on trouve ainsi

$$(3)\qquad \frac{x^2}{\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{\sin^2\varphi} = a^2 - b^2 = c^2.$$

C'est l'équation d'une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée, passant par le point P et par les points symétriques de celui-ci par rapport aux axes et au centre de l'ellipse donnée. On vérifie d'ailleurs les formules (1) *a posteriori*, en observant que la tangente à l'hyperbole en R passe par le point Q. Ces formules permettent de résoudre le problème suivant :

Problème. — *Par un point* R *extérieur à l'ellipse on mène les tangentes : calculer les rayons des cercles tangents à l'ellipse et aux deux tangentes issues du point* R.

Désignons par x, y les coordonnées du point R, par ρ sa distance à l'origine, par u et v ses distances aux deux foyers de l'ellipse, et par V l'angle des deux tangentes à l'ellipse menées par le point R. On a les formules

$$\cos V = \frac{4a^2 - u^2 - v^2}{2uv} \quad \text{et} \quad \cos V = \frac{a^2 + b^2 - \rho^2}{uv}.$$

Cela posé, on détermine les axes de l'hyperbole homofocale à l'ellipse proposée et passant par le point R au moyen de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} = 1,$$

d'où l'on tire, pour μ négatif,

$$2\mu = \rho^2 - a^2 - b^2 - uv$$

ou bien

$$\mu = -uv\cos^2\frac{V}{2}.$$

Pour déterminer le paramètre angulaire φ des points d'intersection de l'hyperbole et de l'ellipse, on a

$$c^2\cos^2\varphi = a^2 + \mu, \quad -c^2\sin^2\varphi = b^2 + \mu,$$

et, en ajoutant,

$$c^2\cos 2\varphi = \rho^2 - uv.$$

On en déduit facilement l'angle φ, que nous supposerons compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et les angles $-\varphi$, $\pi \pm \varphi$.

Enfin, on obtient le rayon du cercle correspondant à chacun des quatre points d'intersection en tirant de la formule (2)

$$\frac{r}{b'} = \frac{(y - b\sin\varphi)\cos\varphi}{(x + a\cos\varphi)\sin\varphi}.$$

Si l'on désigne par r_1 et r_2 les rayons qui correspondent aux deux points ayant pour paramètres angulaires φ et $\varphi + \pi$, on déduit de la formule précédente

$$r_1 r_2 = b'^2,$$

et par suite le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Aux deux extrémités d'un diamètre fixe d'une ellipse, on prend, sur les normales extérieures ou intérieures, deux longueurs dont le produit égale le carré du demi-diamètre conjugué : l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités est une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée, passant par les deux extrémités du diamètre donné.*