H. Resal

Théorie élémentaire des brachistochrones

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 385-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__385_0>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES BRACHISTOCHRONES ;

PAR M. H. RESAL [1].

Cette théorie est motivée par la suppression, qui remonte à 1852, du Calcul des variations dans l'enseignement intérieur de l'École Polytechnique.

Elle est basée sur des considérations analogues à celles dont s'est servi Jacques Bernoulli pour déterminer la nature de la courbe de la plus vite descente, solution d'un problème proposé bien antérieurement par Galilée.

Nous admettrons que la force qui sollicite le point mobile, dont la masse est censée égale à l'unité, dérive d'un potentiel.

THÉORÈME I. — *Si une courbe est brachistochrone entre deux points* A *et* B, *elle l'est aussi entre deux points intermédiaires quelconques* m', n.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et soit mnm' la brachistochrone entre m et m'. La vitesse en m' sera la même, que le mobile parcoure mm' ou mnm'. Mais le temps employé serait plus court dans le trajet $\mathrm{A}mnm'\mathrm{B}$ que dans celui de $\mathrm{A}mm'\mathrm{B}$, qui ne serait plus ainsi la brachistochrone, ce qui est contraire à ce qui a été admis.

---

[1] Cet article était compose, lorsqu'un vague souvenir m'a conduit à rechercher si, dans ce Recueil, je n'avais pas imprimé déjà une Note sur le même sujet. J'ai retrouvé, en effet, dans le volume de 1877 un travail analogue, et j'ai été sur le point de supprimer une bonne partie de cet article. Toutefois, comme la rédaction nouvelle est bien plus complète, et diffère de la précédente en quelques points essentiels, j'ai pensé que ce travail pourrait être utile aux nombreux élèves qui lisent ce Recueil, et j'ai maintenu la nouvelle rédaction telle qu'elle avait été soumise à mon vénérable maître, M. Gerono.

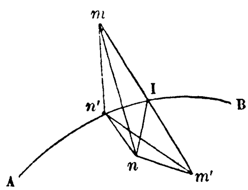
Corollaire. — La courbe est brachistochrone dans le parcours de deux éléments consécutifs.

Théorème II. — *Lorsque le mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface fixe, le plan osculateur en un point de la brachistochrone est normal à la surface de niveau passant par ce point.*

Supposons en effet (*fig.* 1) que cela n'ait pas lieu, et soient

m, m' deux points infiniment voisins de la courbe;

Fig. 1.



AB la section faite par le plan, passant par mm', mené normalement à la surface de niveau qui coupe cette droite en un point intermédiaire I;

n' l'intersection de la courbe avec le plan tangent en I;

n la projection de ce point sur la tangente en I à AB;

V, V' les vitesses avec lesquelles le mobile parcourt mn ou mn, et $n'm'$ ou nm'.

La durée du parcours de $mn'm'$ est

$$\frac{mn'}{V} + \frac{n'm'}{V'},$$

et celle de mnm',

$$\frac{mn}{V} + \frac{n'm'}{V'}.$$

Or $mn' > mn$, $nm' > nm$; la première durée serait donc supérieure à la seconde, ce qui est absurde.

Corollaire. — Dans le cas de la pesanteur, et dans celui où la force est dirigée vers un centre fixe et est une fonction de la distance à ce point, la brachistochrone est plane. En effet, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux ou des sphères.

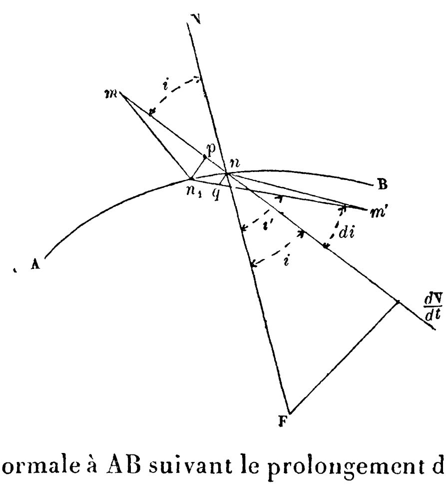
THÉORÈME III (dû à Euler). — *La composante normale de la force extérieure est égale à la force centrifuge.*

Soient (*fig.* 2)

mn, nm' deux éléments consécutifs de la courbe;

AB la section normale faite dans la surface de niveau passant par n, par le plan osculateur mnm';

Fig. 2.



nN la normale à AB suivant le prolongement de laquelle est dirigée la force extérieure F;

n_1 un point de AB infiniment voisin de n;

p, q les projections de n_1, n sur mn, n_1m';

i, i' les angles mnN, $m'n$F;

V, V' les vitesses avec lesquelles le mobile parcourrait mn ou mn_1, nm' ou n_1m'.

Pour que la durée du parcours de mnm' soit minimum, il faut qu'en la retranchant de celle de mn_1m' on obtienne un résultat nul.

On doit donc avoir

$$\frac{mn_1}{V} + \frac{n_1m'}{V'} - \frac{mn}{V} - \frac{nm'}{V'} = 0,$$

ou

$$\frac{mn_1 - mn}{V} - \frac{nm' - n_1m'}{V'} = 0,$$

ou encore

$$\frac{np}{V} = \frac{n_1q}{V'}.$$

Or

$$np = nn_1 \sin i, \quad n_1q = nn_1 \sin i';$$

par suite,

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin i'}{V'},$$

ce qui exprime que $d\dfrac{\sin i}{V} = 0$. On déduit de là

$$V \cos i\, di - dV \sin i = 0,$$

d'où

$$di = \frac{dV}{V} \operatorname{tang} i,$$

et, en divisant par $ds = V\, dt$,

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} \operatorname{tang} i = V^2 \frac{di}{ds}.$$

Mais $\dfrac{di}{ds}$ est la courbure $\dfrac{1}{\rho}$ de la courbe; il vient donc

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{dV}{dt} \operatorname{tang} i,$$

ce qui démontre bien le théorème énoncé, puisque $\dfrac{dV}{dt} \operatorname{tang} i$ n'est autre chose que la composante normale de F.

Théorème IV. — *La tangente à la courbe au point de départ A_0 est normale à la surface de niveau passant par ce point.*

Soient

AB la section faite par le plan osculateur en A_0 dans une surface de niveau infiniment voisine de ce point;
A_0B la normale à cette section suivant laquelle agit la force F;
A l'intersection de la brachistochrone avec AB;
φ l'angle AA_0B;
θ la durée du trajet A_0A.

On a

$$A_0A = \frac{F}{2}\cos\varphi\,\theta^2, \quad A_0A = \frac{A_0B}{\cos\varphi},$$

d'où

$$\theta^2 = \frac{2A_0B}{F\cos^2\varphi}.$$

Le minimum de θ par rapport à φ correspondant à $\varphi = 0$, il faut que A coïncide avec B, ce qu'il fallait établir.

Équations générales, en coordonnées rectangulaires, des brachistochrones lorsque le mobile n'est pas assujetti à rester sur une surface.

Soient

α, β, γ les angles formés avec Ox, Oy, Oz par la tangente au point (x, y, z) de la courbe;
λ, μ, ν les angles semblables relatifs à la normale principale;
λ', μ', ν' ceux qui se rapportent à la binormale;
ε l'angle de contingence;
ds l'élément d'arc;
ρ le rayon de courbure;
$\varphi(x, y, z)$ le potentiel.

On sait que

$$(a)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{d\cos\alpha}{\varepsilon},\\ \cos\mu &= \frac{d\cos\beta}{\varepsilon},\\ \cos\nu &= \frac{d\cos\gamma}{\varepsilon},\\ \varepsilon &= \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2},\end{aligned}\right.$$

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\lambda' &= \frac{\cos\gamma\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\gamma}{\varepsilon},\\ \cos\mu' &= \frac{\cos\alpha\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\alpha}{\varepsilon},\\ \cos\nu' &= \frac{\cos\beta\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\beta}{\varepsilon}.\end{aligned}\right.$$

Si nous posons

$$\Delta = \sqrt{\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}},$$

les cosinus des angles formés avec Ox, Oy, Oz par la normale à la surface de niveau passant par le point (x, y, z) étant

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{1}{\Delta}\frac{d\varphi}{dy},\quad \frac{1}{\Delta}\frac{d\varphi}{dz},$$

il vient, en exprimant que cette droite est perpendiculaire à la binormale à la courbe,

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{dx}\cos\lambda' + \frac{d\varphi}{dy}\cos\mu' + \frac{d\varphi}{dz}\cos\nu' = 0.$$

La composante F_n de la force extérieure F (qui est normale à la surface de niveau) suivant le rayon de courbure a pour expression

$$(d)\quad \begin{cases} F_n = \dfrac{d\varphi}{dx}\cos\lambda + \dfrac{d\varphi}{dy}\cos\mu + \dfrac{d\varphi}{dz}\cos\nu \\ \quad = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\,d\cos\alpha + \dfrac{d\varphi}{dy}\,d\cos\beta + \dfrac{d\varphi}{dz}\,d\cos\gamma\right). \end{cases}$$

Mais, en désignant par A une constante, le principe des forces vives donne

$$V^2 = 2(\varphi + A),$$

d'où, d'après le théorème d'Euler,

$$(e)\qquad F_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2\varepsilon}{ds} = 2(\varphi + A)\frac{\varepsilon}{ds}.$$

En identifiant les expressions (d) et (e), et remplaçant ε par sa valeur (c), on trouve

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx}\,d\cos\alpha + \dfrac{d\varphi}{dy}\,d\cos\beta + \dfrac{d\varphi}{dz}\,d\cos\gamma \\ \quad = 2(\varphi + A)\,\dfrac{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}. \end{cases}$$

En remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et les valeurs, qui s'en déduisent, de $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ par leurs expressions en fonction de x, y, z et de leurs dérivées, les équations (2) et (3) seront les équations de la courbe.

De la courbe de la plus vite descente.

Nous savons déjà que, lorsque le mobile est uniquement soumis à l'action de la pesanteur, la courbe décrite est comprise dans un plan vertical.

Soient

O le point de départ ;

Ox, Oy son horizontale et sa verticale ;

α l'inclinaison de la tangente à la courbe sur Ox.

On a

$$V^2 = 2gy,$$

et, comme α diminue quand y augmente, on est conduit à poser

$$\frac{V^2}{\rho} = -V^2\frac{d\alpha}{ds} = -2gy\frac{d\alpha}{ds}.$$

Mais, d'après le théorème d'Euler, cette expression est égale à $g\cos\alpha$, d'où

$$-2y\frac{d\alpha}{ds} = \cos\alpha.$$

Or $ds = \dfrac{dy}{\sin\alpha}$; par suite,

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{y} = -\frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\cos\alpha}$$

et

$$\cos\alpha = C\sqrt{y},$$

en désignant par C une constante.

On reconnaît ainsi que la courbe est une cycloïde à base horizontale, dont O est un point de rebroussement.

Brachistochrone dans le cas où le mobile est soumis à l'action d'une force dirigée positivement ou négativement vers un centre fixe O, *et qu'elle est fonction de la distance r à ce centre.*

Pour fixer les idées, nous supposerons que la force est attractive et nous représenterons par $f(r)$ son potentiel. Nous rappellerons que la courbe est plane. Nous distinguerons par l'indice o les quantités qui se rapportent au point de départ A_0. Nous prendrons pour axe des abscisses la direction de OA_0 (*fig.* 3) à laquelle la courbe est tangente en A_0.

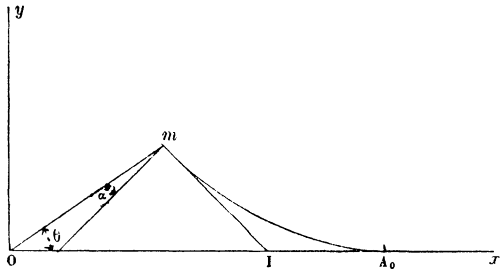
Soient

m un point quelconque de la courbe ;

I l'intersection de la tangente en ce point avec Ox;

α l'angle formé par la normale en m avec le rayon vecteur;

Fig. 3.



θ l'angle polaire mOx.

On a, pour le carré de la vitesse,

$$V^2 = 2[f(r_0) - f(r)]. \tag{4}$$

Si l'on remarque que

$$\widehat{mIx} = \alpha + 90^\circ + \theta,$$

l'angle de contingence a pour expression

$$\varepsilon = -d\widehat{mIx} = -(d\alpha + d\theta),$$

et, comme

$$ds = -\frac{dr}{\sin\alpha}$$

il vient pour la courbure

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{d\alpha + d\theta}{dr}\right)\sin\alpha. \tag{5}$$

La composante normale de la force étant $f'(r)\cos\alpha$, nous avons, en vertu du théorème d'Euler, en ayant égard aux formules (1) et (2),

$$2[f(r_0) - f(r)]\left(\frac{d\alpha}{dr} + \frac{d\theta}{dr}\right) = f'(r)\cos\alpha. \tag{6}$$

Nous remarquerons maintenant que

$$\cot\alpha = -r\frac{d\theta}{dr}, \tag{7}$$

et, en remplaçant dans l'équation (6) la valeur de $\frac{d\theta}{dr}$ déduite de cette formule, on trouve

$$2[f(r_0) - f(r)]\left(\sin\alpha\frac{d\alpha}{dr} + \frac{\cos\alpha}{r}\right) = f'(r)\cos\alpha. \tag{8}$$

Si nous posons

$$\varphi'(r) = -\frac{f'(r)}{2[f(r_0) - f(r)]} + \frac{1}{r}, \tag{9}$$

l'équation précédente devient

$$-\frac{d\cos\alpha}{dr} + \varphi'(r)\cos\alpha = 0,$$

d'où, en désignant par M une constante,

$$\cos\alpha = \mathrm{M}e^{-\varphi(r)}. \tag{10}$$

On déduit de là

$$\cot\alpha = \frac{\mathrm{M}e^{-\varphi(r)}}{\sqrt{1 + \mathrm{M}^2e^{-2\varphi(r)}}} = -r\frac{d\theta}{dr},$$

d'où, en remarquant que $\theta = 0$ pour $r = r_0$,

$$\theta = \mathrm{M}\int_r^{r_0}\frac{e^{-\varphi(r)}\,dr}{r\sqrt{1 + \mathrm{M}^2e^{-2\varphi(r)}}}. \tag{11}$$

La constante M se déterminera par la condition que pour le point d'arrivée on ait

$$r = r_1, \quad \theta = \theta_1.$$

Supposons, par exemple, que la force soit proportionnelle à la distance du mobile au centre d'attraction ou que

$$f(r) = \mu r^2,$$

μ désignant un coefficient donné. Il est facile de voir que, dans ce cas particulier, on a

$$\varphi'(r) = \frac{r}{r_0^2 - r^2} + \frac{1}{r} = \frac{r_0^2}{(r_0^2 - r^2)r}$$
$$= r_0^2\left[\frac{1}{2(r_0 - r)} - \frac{1}{2(r_0 + r)} + \frac{1}{r}\right],$$

d'où

$$\varphi(r) = r_0^2 \log \frac{r}{\sqrt{r_0^2 - r^2}},$$

et successivement

$$\cos\alpha = \frac{M\sqrt{r_0^2 - r^2}}{r},$$

$$r^2 \sin^2\alpha = (1 + M^2)\left(r^2 - r_0^2 \frac{M^2}{1 + M^2}\right),$$

d'où l'on conclut que la courbe est une hypocycloïde, vérification d'un théorème bien connu.

Extension du théorème d'Euler au cas où le mobile est assujetti à rester sur une surface.

Cette extension est due à M. Roger, qui, en se basant sur le Calcul des variations, l'a démontrée dans une Thèse insérée au Tome XIII (1re série) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Ce n'est que dans ces derniers temps que je suis parvenu à donner une démonstration du théorème de Roger, qui a, sous certain rapport, une grande importance, puisque, avec l'équation de la surface fixe, il permet de définir la brachistochrone.

Soient (*fig.* 4)

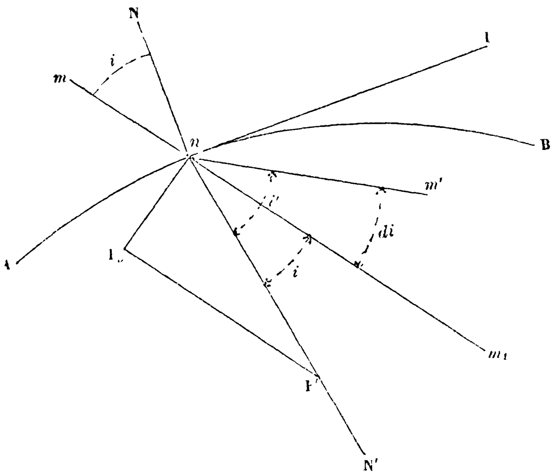
mn, nm' deux éléments consécutifs de la courbe;

AB l'intersection de la surface fixe avec la surface de niveau passant par n;

nT la tangente à cette courbe;

nN, nN' les perpendiculaires en n à cette droite dans les plans tangents mnT, $m'nT$;

Fig. 4.



i, i' les angles mnN et $m'nN'$;

nm_1 la droite menée dans le plan Tnm' qui fait avec nN' l'angle i.

Concevons que l'on rabatte le plan TnN' dans le plan TnN; nm_1 viendra se placer dans le prolongement de mn; mais alors on rentrera dans le cas ordinaire traité plus haut, et la condition pour que la durée du parcours mnm' soit minimum sera

$$(a) \qquad \frac{dV}{dt}\tan g\, i = V^2 \frac{di}{ds}.$$

Revenant à la réalité, on voit que mn, nm' sont les directions de deux éléments consécutifs d'une géodésique tracée sur la surface développable $mnTm$, et par suite sur la surface fixe; di, $\frac{di}{ds}$ sont, par suite, l'angle de contingence géodésique et la courbure géodésique.

Soient

F' la force extérieure F estimée dans le plan tangent, dirigée suivant nN';

F'_b la composante (dite géodésique) de F', normale à la vitesse;

φ l'angle formé par le rayon de courbure ρ avec la normale à la surface.

On a

$$F_b = \frac{dV}{dt}\,\mathrm{tang}\,i,$$

$$\frac{di}{ds} = \frac{\sin\omega}{\rho},$$

et l'équation (a) devient

$$F_b = \frac{V^2 \sin\varphi}{\rho}.$$

Mais, si F_n est la composante de la force F dirigée suivant le rayon de courbure, on a

$$F_b = F_n \sin\varphi;$$

par suite,

$$F_n = \frac{V^2}{\rho},$$

ce qu'il fallait établir.

On démontrera sans peine qu'au point de départ la courbe est normale à l'intersection de la surface de niveau en ce point et de la surface fixe.